УДК 534.1

Дата поступления: 17.01.2008

Давление волн, распространяющихся в рояльных струнах, на импедансную границу («мостик»)

В. И. Ерофеев, Е. Е. Лисенкова, А. С. Стулов

Рассмотрено взаимодействие поперечных волн в струне, имеющей в качестве одного из граничных закреплений колебательную систему (мостик), содержащую массу, упругость и демпфер; показано на основании работ классиков (Релей, Лармор, Николаи), что упругие волны, распространяясь по различным системам, переносят с собой энергию и импульс; следствием переноса импульса является давление, производимое волной на препятствие.

ВВЕДЕНИЕ

Утверждение о том, что волны оказывают давление на тела, препятствующие их свободному распространению, впервые, по-видимому, высказал Л.Эйлер в 1746 г. [1]. В 1873 г. Д. Максвелл дал теоретическое обоснование эффекту давления волн и вывел формулу для расчета величины давления, оказываемого электромагнитными волнами на неподвижное препятствие [2]:

$$F = \frac{\Phi}{c}, \tag{1}$$

где Φ – поток волновой энергии; c – скорость распространения электромагнитных волн.

Результаты экспериментальных наблюдений В. Дворжака давления звуковых волн на акустические резонаторы в 1876 г. были объяснены Д. Рэлеем [3]. После знаменитых экспериментов П.Н.Лебедева [4] по обнаружению давления света Д. Рэлей и И. Лармор в 1902 г. независимо друг от друга высказали предположение, что всякое волновое движение, какова бы ни была его природа, оказывает давление на тела, препятствующие его свободному распространению [5, 6]. Начатые ими исследования эффекта давления механических волн нашли более полное развитие в работах Е.Л. Николаи, рассмотревшего в 1912 –1925 гг. ряд задач о взаимодействии поперечных волн струны с подвижными закреплениями [7].

ДАВЛЕНИЕ ВОЛН РАЗЛИЧНОЙ ФИЗИЧЕСКОЙ ПРИРОДЫ

Оценим величину давления, оказываемого волнами различной физической природы на неподвижное препятствие. Если препятствие волну поглощает, то давление будет определяться формулой (1), где $c = \omega/k$ – фазовая скорость; ω – частота; k – волновое число; Φ – мощность источника волн в предположении, что весь генерируемый поток волновой энергии попадает на препятствие. Соответствующие оценки приведены в таблице, где для удобства сравнения мощности источников волн взяты одинаковыми и равными 1 Вт. Видно, что для поперечных волн в рояльных струнах эту величину в некоторых случаях необходимо принимать во внимание.

Характеристики волн различной физической природы

Волны	Скорость c, м/с	Давление F, Н
Электромагнитные в вакууме	$3\cdot10^8$	$3{,}3\cdot10^{-9}$
Звуковые в металле	$5\cdot10^3$	$2\cdot10^{-4}$
Звуковые в воздухе	$3\cdot10^2$	$3{,}3\cdot10^{-3}$
Поперечные в рояльных струнах (piano Estonia-190)	70...420	$(2{,}3...14)\cdot10^{-3}$
Низкочастотные гравитационные	10^{-1}...1	1...10

ПОПЕРЕЧНЫЕ ВОЛНЫ В СТРУНЕ С ВЯЗКО-УПРУГО-ИНЕРЦИОННЫМ ЗАКРЕПЛЕНИЕМ

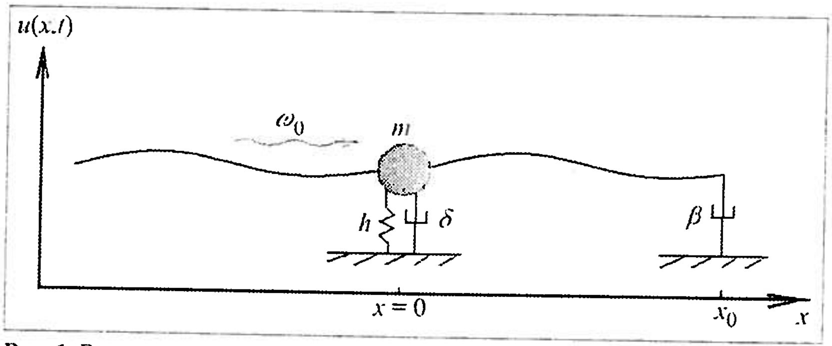

Рис. 1. Взаимодействие поперечных волн в струне с вязко-упруго-инерционным закреплением (мостиком)

Рассмотрим взаимодействие поперечных волн в струне с граничным закреплением, представляющим колебательную систему («мостик»), содержащую массу, упругость и демпфер (рис. 1). Поперечные смещения струны $u(x,t)$ описываются уравнением

$$\rho u_{tt} - N u_{xx} = 0, \tag{2}$$

удовлетворяющим краевым условиям:

при $x=0$ $u(-0,t)=u(+0,t)={}^0u(t)$, $m\,{}^0\ddot{u}+h_0\,{}^0u+\delta\,{}^0\dot{u}=\left[-Nu_x\right]_{x=0}$;

при $x=x_0$ $\beta\dot{u}(x_0,t)=-Nu_x(x_0,t)$.

Здесь ρ, N – погонная плотность и натяжение струны; h_0, m, δ – коэффициенты, характеризующие упругие, инерционные и диссипативные свойства колебательной системы, соответственно. Квадратные скобки означают разность предельных значений стоящих в них величин справа и слева от объекта.

Выберем коэффициент диссипации β так, чтобы он соответствовал параметру идеального согласованного демпфирующего устройства, при котором отраженные от границы $x=x_0$ волны отсутствуют. Для этого величину коэффициента демпфирования необходимо положить равной импедансу струны $\beta=\sqrt{N\rho}$.

Пусть источник колебаний, расположенный слева от объекта, возбуждает гармоническую волну $u_f(x,t)=A_0\exp\left[i(\omega_0 t-k_0x)\right]$, которая, в результате взаимодействия с объектом порождает отраженную $u_r(x,t)=A_1\exp\left[i(\omega_1 t-k_1x)\right]$ и проходящую $u_p(x,t)=A_2\exp\left[i(\omega_2 t-k_2x)\right]$ волны (здесь амплитуды A_j – комплексные постоянные величины, j = 1, 2). После подстановки решения

$$u(x,t)=\begin{cases} u_f(x,t)+u_r(x,t), & x<0,\\ u_p(x,t), & x>0,\end{cases} \tag{3}$$

в уравнение (2) и краевые условия, получим частоты ω_j, волновые числа k_j и амплитуды вторичных (отраженной и прошедшей) волн:

$$\omega_1=\omega_2=\omega_0,\ k_{1,2}=\mp\omega_0/c;$$

$$A_1=A_0\sqrt{\left(\omega_0^2\delta^2+\left(h-\omega_0^2m\right)^2\right)\Big/\left(\omega_0^2(2z+\delta)^2+\left(h-\omega_0^2m\right)^2\right)}\exp((i\phi);$$

$$A_2=2z\omega_0A_0\Big/\left[\left(\omega_0^2(2z+\delta)^2+\left(h-\omega_0^2m\right)^2\right)\exp(i\psi)\right], \tag{4}$$

где

$$\mathrm{tg}\frac{\phi}{2}=\left\{\sqrt{\left(\omega_0^2\delta^2+\left(h-\omega_0^2m\right)^2\right)\left(\omega_0^2(2z+\delta)^2+\left(h-\omega_0^2m\right)^2\right)}+\omega_0^2\delta(2z+\delta)+\left(h-\omega_0^2m\right)^2\right\}\Big/\left[2\omega_0z\left(h-\omega_0^2m\right)\right];$$

$$\mathrm{tg}\frac{\psi}{2}=\left\{\left(\omega_0^2(2z+\delta)^2+\left(h-\omega_0^2 m\right)^2\right)-\omega_0(2z+\delta)\right\}\Big/\left(h-\omega_0^2 m\right);$$

$z=\sqrt{N\rho}$ – волновое сопротивление (импеданс) струны.

При стремлении жесткости или массы закрепления к бесконечности (4) вырождается в решение для абсолютно жесткого закрепления.

Поскольку закрепление обладает упругими и инерционными свойствами, то, следовательно,оно и энергоемко. Энергия падающей волны переходит в потенциальную и кинетическую энергию закрепления, а затем передается струне. На этот процесс затрачивается время. Определим время задержки по энергии по формуле [8]: $\tau_{gr}=\left|d\phi/d\omega_0\right|$, где ϕ – фаза волны. Отсюда на основании (4), задержка по энергии для отраженной волны будет в виде

$$\tau_{gr1}=2z\left(h+\omega_0^2 m\right)\left(-\omega_0^2\delta(2z+\delta)+\left(h-\omega_0^2 m\right)^2\right)\left\{\left(\omega_0^2\delta^2+\left(h-\omega_0^2 m\right)^2\right)\left(\omega_0^2(2z+\delta)^2+\left(h-\omega_0^2 m\right)^2\right)\right\}^{-1},$$

задержка по энергии для прошедшей волны:

$$\tau_{gr2}=(2z+\delta)\left(h+\omega_0^2 m\right)\left(\omega_0^2(2z+\delta)^2+\left(h-\omega_0^2 m\right)^2\right)^{-1}.$$

В пренебрежении диссипативными потерями, время задержки по энергии для отраженных волн такое же, как и для прошедших волн.

Падающая на закрепление волна оказывает на него давление, определяемое согласно формуле [8]: $F_{pr}=-\left[\left(\rho u_t^2+Nu_x^2\right)/2\right]_{x=0}$, среднее значение которого за период $2\pi/\omega_0$ имеет вид

$$<F_{pr}>=\rho\omega_0^2A_0^2\left\{1-\frac{2z\omega_0^2(2z+\delta)}{\omega_0^2(2z+\delta)^2+\left(h_0-m\omega_0^2\right)^2}\right\}.$$

На рис. 2 приведена зависимость безразмерной постоянной составляющей давления волн $<F_{pr}>\Big/\left(\rho\Omega_0^2A_0^2\right)$ от безразмерной частоты падающей волны ω_0/Ω_0 ($\Omega_0=\sqrt{h/m}$) без учета (кривая *1*) и при наличии (кривая *2*) диссипативных потерь закрепления. При совпадении частоты падающей волны с собственной частотой колебаний закрепления, давление на закрепление минимально, а поперечное смещение закрепления достигает наибольшего значения.

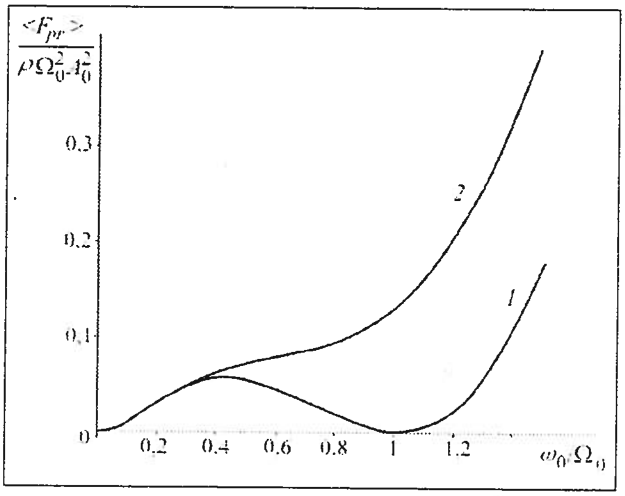

Рис. 2. Зависимость постоянной составляющей давления волн от частоты падающей волны

Заметим, что параметры мостика могут изменяться под действием сил волнового давления, например, может увеличиться упругость закрепления. Так, если закрепляющая пружина длиной l_0 удлиняется на величину Δl, то это приведет к изменению упругих сил в поперечном направлении. Таким образом, с учетом сил давления волн, коэффициент упругости закрепления будет иметь вид

$$h=h_0\left(1+\frac{F_{pr}}{F_{pr}+2h_0l_0}\right). \tag{5}$$

Если скорость продольных волн много больше скорости поперечных волн в струне, то в выражении (5) достаточно учесть только постоянную составляющую сил давления волн, что приведет к незначительным изменениям коэффициентов отражения (рис. 3,*а*) и прохождения (рис. 3,*б*) волн. Если же эти скорости различаются не более чем на два порядка, то необходимо учитывать и переменную составляющую давления волн. В таком случае потребуется решать задачу с периодически изменяющимся коэффициентом (частота изменения которого равна удвоенной частоте падающей волны). Этим обеспечивается модуляция частот проходящих и отраженных волн.

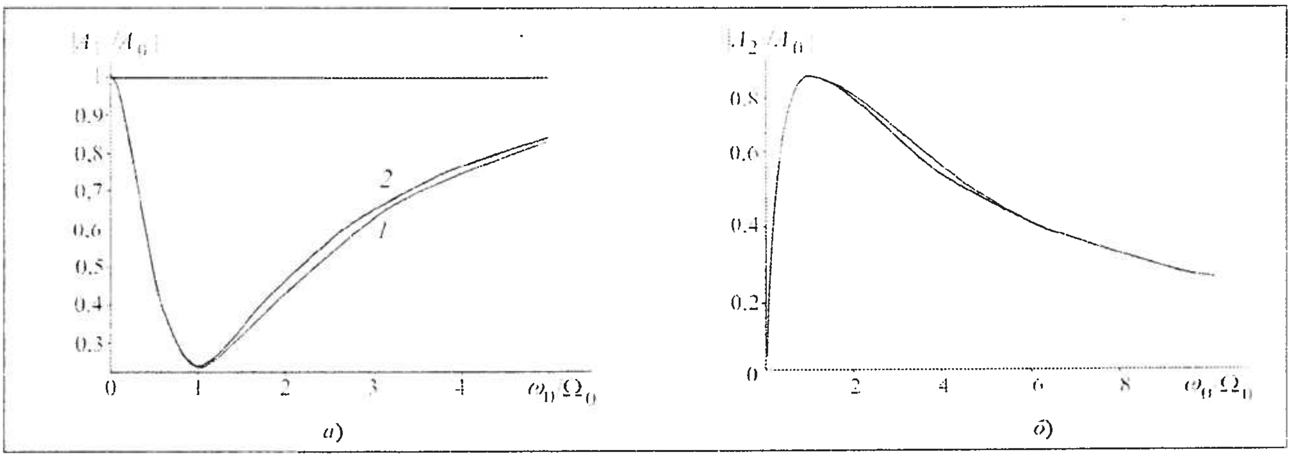

Рис. 3. Зависимость коэффициентов отражения (*а*) и прохождения (*б*) волн от приведенной частоты падающей волны с учетом (кривая *1*) и без учета (кривая *2*) постоянной составляющей давления волн

Показано, что параметры вязко-упруго-инерционного закрепления могут изменяться под действием волнового давления, а это, в свою очередь, влияет на амплитудно-частотные характеристики струны, в частности, может наблюдаться модуляция основной частоты.

Литература

1. *Euler L.* Recherches physiques sur la cause de la queüe des cometes, de la lumiere boreale, et de la lumiere zodiacale. – Mémoires de l'académie des sciences de Berlin, 2, 1746, pp. 117–140.
2. *Максвелл Дж. К.* Избранные сочинения по теории электромагнитного поля. – М.: ГИТТЛ, 1954.
3. *Рэлей (Стретт Дж.)* Теория звука. Т.2. – М.: ГИТТЛ, 1944.
4. *Лебедев П.Н.* Давление света. (Собр. соч.). – М.: Изд-во АН СССР, 1963, с. 368–390.
5. *Rayleigh J.W.S.* On the pressure of vibrations. – Phil. Mag., 2, 1902, Ser. 6, vol. 3, no. 15, pp. 338–350.
6. *Larmor I.* Radiation. – Encyclop. Brit., 1902, vol. 32.
7. *Nicolai E.L.* On a Dinamical illustration of the Pressure of Radiations. – Phil. Mag., 1925, Ser. 6, vol. 49, pp. 171–175.
8. *Весницкий А.И.* Волны в системах с движущимися границами и нагрузками. – М.: Наука, Физматлит, 2001.

About pressure of waves extending in strings of piano on impedance border («bridge»)

V.I. Erofeyev, E.E. Lissenkova and A.S. Stulov

We investigate the interaction of the transverse waves in piano string with the string support (bridge), which is considered as an oscillating system consisting of the mass, spring and damper. The part of the string passing the bridge terminates at a point load on a damper. Already in classical papers (J. Rayleigh, J. Larmor, E. Nicolai), it was shown that the elastic waves traveling through various systems transfer with themselves energy and pulse. For this reason the traveling waves exert the pressure on an obstacle. In this paper we show, that the parameters of viscoelastic inertial support of the string can be varying under the action of the traveling wave pressure. This phenomenon, in turn, changes the amplitude-frequency response of the string vibrations, and in particular, the modulation of the natural frequency of the string can be observed.