Дата поступления: 25.05.09

УДК.535.80.098

Параметрическая томография трехмерных потоков

А.Э. Пуро – д.ф.-м.н., проф., зав. кафедрой математики и статистики Эстонско-Американской бизнес-академии (Эстония)

А.С. Стулов – к.ф.-м.н., ст. научн. сотр. Института кибернетики Таллиннского технического университета (Эстония)

Предложен метод реконструкции течений сред сложной структуры на основе двулучепреломления света и эффекта Фарадея; в качестве исходной информации использованы значения параметров поляризованного света, прошедшего через изучаемое течение; проведены измерения томографическим методом при наличии и при отсутствии магнитного поля; в алгоритме реконструкции поля использовано обращение экспоненциального преобразования Радона мнимого параметра.

Ключевые слова: *фотоупругость; двулучепреломление в потоках; параметрическая томография; экспоненциальное преобразование Радона; оптические соотношения.*

A method of reconstruction of flows of the complex structure by means of the tomography technique based on the measurement of the change in the polarization of light passed through a birefringent medium and Faraday effect. The reconstruction algorithm is based on the exponential Radon transform of an imaginary parameter for cases by at presence and in the absence of a magnetic field.

Keywords: *photoelasticity, flow birefringence; parametric tomography, exponential Radon transform, stress-optical law.*

ВВЕДЕНИЕ

Для изучения пластических течений и деформаций вязких потоков в экспериментальной механике интенсивно используются методы фотоупругости [1]. Как правило, они применяются для визуализации и определения качественного поведения течений [2]. Количественные методы исследования трёхмерных потоков основываются на томографические принципах и, в основном, ограничиваются осесимметричными случаями [3, 4]. Поле скоростей – векторное поле, его можно в плоскости просвечивания разложить на потенциальную и вихревую составляющие. Ультразвуковая томография течений, основанная на измерении времени прохождения звука [5], позволяет определить вихревую составляющую, а интегральная фотоупругость, основанная на двулучепреломлении потока [6], потенциальную. Применение ультразвуковой томографии для потоков, имеющих относительно малые размеры, проблематично.

В статье для полной реконструкции скорости течений предлагается использовать методику магнитофотоупругости [7].

С физической точки зрения, методика параметрической томографии [8] основана на дополнительном вращении плоскости поляризации луча, обусловленном эффектом Фарадея. Технические параметры современных магнитополярископов уже позволяют проводить томографические измерения [9]. С математической точки зрения, метод параметрической томографии базируется на использовании экспоненциального преобразования Радона мнимого аргумента применительно к реконструкции векторных и тензорных полей [7, 8].

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ РАДОНА ВЕКТОРНЫХ И ТЕНЗОРНЫХ ПОЛЕЙ

Определим экспоненциальное преобразование Радона мнимого параметра скалярной функции $f(x,y)$ при помощи лучевого интеграла

$$Er(s,\omega,\beta,f) = \int f(s\cos\theta - t\sin\theta,\ s\sin\theta + t\cos\theta)\, e^{i\beta t}\, dt = \int f(s\omega + t\varpi)\, e^{i\beta t}\, dt = \breve{f}(s,\theta,\beta). \qquad (1)$$

Здесь (x,y) – переменные неподвижной системы координат, связанные с параметрами (s,t) подвижной системы преобразованием поворота

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix};$$

β – параметр преобразования; $\boldsymbol{\omega} = (\cos\theta, \sin\theta)$, $\boldsymbol{\varpi} = (-\sin\theta, \cos\theta)$ – единичные векторы, направленные вдоль осей s, t соответственно; i – мнимая единица.

Краткий вывод формулы обращения преобразования (1)

$$f(r) = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \left\{ e^{-i\beta r\varpi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ch[\beta(r\omega - s)]}{r\omega - s} \frac{\partial}{\partial s} \breve{f}(s, \theta, \beta)\, ds \right\} d\theta \tag{2}$$

приведен в [7].

Согласно теореме Гельмгольца, векторное поле $\mathbf{V}(x,y)$ может быть представлено в виде безвихревого и соленоидального полей:

$$\mathbf{V} = \operatorname{grad} \tau + \operatorname{rot} \eta = (\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial y})\, \tau + (\mathbf{e}_1 \frac{\partial}{\partial y} - \mathbf{e}_2 \frac{\partial}{\partial x})\eta\,. \tag{3}$$

Потенциалы безвихревой и соленоидальной компонент векторного поля обозначены соответственно через τ и η; $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ – единичные векторы, направленные вдоль неподвижных осей координат x,y.

Измерения в линейной векторной томографии могут быть представлены лучевым интегралом в виде скалярного (внутреннего) произведения векторов $\mathbf{V}$ и $\mathbf{p}$:

$$\int p(s,\omega)\, V(s\omega + t\varpi)\, e^{i\beta t}\, dt = Er[p(s,\omega)V] = \breve{V}(s,\omega,\beta)\,. \tag{4}$$

Здесь $\mathbf{p}(s, \boldsymbol{\omega})$ – так называемый «пробный» вектор, который может зависеть и от направления просвечивания ω и от полюсного расстояния s.

Преобразуя выражение лучевого интеграла (4) через потенциалы τ и η, получим

$$\breve{V}(s,\omega,\beta) = p_k \omega_k (\frac{\partial}{\partial s}\breve{\tau} - i\beta\breve{\eta}) - p_k \varpi_k (\frac{\partial}{\partial s}\breve{\eta} + i\beta\breve{\tau})\,. \tag{5}$$

Если пробный вектор $\mathbf{p} = \boldsymbol{\omega}$ направлен вдоль луча, то интеграл (5) преобразуется в выражение

$$Er[pV] = -\left(\frac{\partial}{\partial s}\breve{\eta} + i\beta\breve{\tau}\right) \tag{6}$$

и называется *продольным*. При $\beta = 0$ продольный интеграл содержит только производную от соленоидальной компоненты.

Если пробный вектор $\mathbf{p} = \boldsymbol{\varpi}$ ортогонален лучу, интеграл (5) преобразуется в выражение

$$Er[pV] = (\frac{\partial}{\partial s}\breve{\tau} - i\beta\breve{\eta}) \tag{7}$$

и называется *поперечным*. При $\beta = 0$ поперечный интеграл содержит только производную от безвихревой компоненты. Из формул (6) и (7) следует, что в том и другом случаях измерения лучевых интегралов при значениях $\beta = 0$ и $\beta \neq 0$ позволяют полностью реконструировать двумерное векторное поле.

Аналогично предыдущему случаю, инвариантное представление двумерного симметричного тензора напряжений σ_{ij} содержит три скалярных потенциала G, N, F [7]:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= G + 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N + \frac{\partial^2}{\partial y^2} F, \\ \sigma_{xy} &= -(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}) N - \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} F, \\ \sigma_{yy} &= G - 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} N + \frac{\partial^2}{\partial x^2} F. \end{aligned} \tag{8}$$

В двумерных пластических и вязких потоках тензорные поля деформаций и напряжений определяются двумерными векторными полями скоростей σ = defV. Выражая вектор **V** через потенциалы τ и η, приходим к представлению

$$\sigma_{xx}=\frac{\partial}{\partial x}V_x=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\tau+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\eta,$$
$$\sigma_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}V_y+\frac{\partial}{\partial y}V_x\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\tau-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\eta, \tag{9}$$
$$\sigma_{yy}=\frac{\partial}{\partial y}V_y=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\tau-\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\eta.$$

Измерения в линейной тензорной томографии также можно представить лучевым интегралом от внутреннего произведения пробного тензора $d(s,\boldsymbol{\omega})$ на тензорное измеряемое поле σ:

$$\int d(s,\boldsymbol{\omega})\,\sigma(s\boldsymbol{\omega}+t\boldsymbol{\varpi})e^{i\beta t}\,dt=Er[d(s,\boldsymbol{\omega})\sigma]. \tag{10}$$

В специальном случае взаимодействия излучения с измеряемым тензорным полем σ, когда $d=\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}$, лучевой интеграл (10) имеет вид

$$Er[\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}\sigma]=G-2i\beta\frac{\partial}{\partial s}N-\beta^2F, \tag{11}$$

и называется *поперечным*. Такие измерения встречаются в интегральной фотоупругости при исследовании поля напряжений [1, 7], поля скоростей жидкости [4, 6], пластических деформаций [3] и вязких течений [4]. Алгоритм реконструкции напряжений в упругой и пластической средах представлен в [8].

ЛУЧЕВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ В НЕОДНОРОДНОЙ СЛАБОАНИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Распространение поляризованного света в неоднородной слабо анизотропной среде определяется [10] уравнением

$$(\boldsymbol{\omega}\nabla)\,\mathbf{E}=[\mathrm{A}+\mathrm{B}]\,\mathbf{E}, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ – ортогональный вектор в плоскости просвечивания, перпендикулярный направлению просвечивания; ∇ – оператор Набла; $\bar{E}=\begin{bmatrix}E_z\\ E_i\omega_i\end{bmatrix}$; $A=\frac{-i}{n_0}\begin{bmatrix}(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{ik}\omega_i\omega_k)/2 & \varepsilon_{zi}\omega_i\\ \varepsilon_{zi}\omega_i & -(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{ik}\omega_i\omega_k)/2\end{bmatrix}$; $B=VH\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}$;

E_k – компоненты вектора Джонса, характеризующие изменение поляризации; ε_{ik} – компоненты тензора диэлектрической проницаемости; n_0 – показатель преломления среды; V – постоянная Верде; H – напряженность магнитного поля.

Решения системы уравнений (12) можно представить в виде двух лучевых интегралов [8], значение которых определяется экспериментально в результате просвечивания:

$$\gamma\cos(\alpha_*+\alpha_0+\psi)=C\left\{\int\frac{1}{2}[\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{km}\omega_k\omega_m]\cos(2\beta t)dt-\int\varepsilon_{zk}\omega_k\sin(2\beta t)dt\right\}, \tag{13}$$

$$\gamma\sin(\alpha_*+\alpha_0+\psi)=C\left\{\int\frac{1}{2}[\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{km}\omega_k\omega_m]\sin(2\beta t)dt+\int\varepsilon_{zk}\omega_k\cos(2\beta t)dt\right\}. \tag{14}$$

Здесь $\psi=VHt=\beta t$ – угол вращения плоскости поляризации под влиянием магнитного поля (эффект Фарадея); параметры интегралов – характеристическая разность фаз γ и углы первичного и вторичного характеристических направлений α_0 и α_* непосредственно измеряются при эксперименте.

Оба лучевых интеграла (13) и (14) могут быть представлены в виде поперечных интегралов: первый от двумерного тензорного поля

$$H_1(s,\omega,\beta)=\int(\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{km}\omega_k\omega_m)e^{i\beta t}dt\,, \tag{15}$$

а второй – от двумерного векторного поля

$$H_2(s,\omega,\beta)=\int(\varepsilon_{zk}\omega_k)e^{i\beta t}dt\,. \tag{16}$$

Для экспериментального определения свойств среды при помощи томографии необходимо дополнительно установить зависимость тензора диэлектрической проницаемости от механических параметров исследуемой среды.

ОПТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ДВУЛУЧЕПРЕЛОМЛЯЮЩИХ СРЕД

В экспериментальной механике выделяются *четыре основных закона двулучепреломления*, которые для изотропной среды в линейном приближении связывают компоненты тензора диэлектрической проницаемости ε_{ik} с компонентами тензоров, характеризующих механические свойства среды [1]

1) закон Неймана для деформаций – $\varepsilon_{ij}=ae_{ij}$;

2) закон Неймана для скорости деформаций – $\varepsilon_{ij}=a\dot{e}_{ij}$;

3) закон Максвелла для напряжений – $\varepsilon_{ij}=a\sigma_{ij}$;

4) закон Филона–Джессопа для напряжений и деформаций – $\varepsilon_{ij}=a\sigma_{ij}+be_{ij}$.

Здесь $e_{ij},\dot{e}_{ij},\sigma_{ij}$ – тензоры деформации, скорости деформации и напряжений; a и b постоянные коэффициенты.

Поведение потоков с микроструктурой (пластические деформации, вязкие течения, биологические растворы) представляют большой практический интерес. Оптические свойства сред (значения коэффициентов) для различных материалов достаточно хорошо изучены. Так как особенности вязкости и пластичности особенно ярко выражаются при течении в малых масштабах (пограничных слоях), то оптические эксперименты обычно проводятся в тонких трубках.

Имеются многочисленные экспериментальные данные по плоским и осесимметрическим моделям, которые используются при исследовании. Характерный размер области исследования обычно не превосходит 40 мм. В современных магнитополярископах [9] рабочий диаметр порядка 70 мм, что позволяет непосредственно использовать их для исследования трехмерных потоков сред с микроструктурой.

ТОМОГРАФИЯ ВЯЗКИХ ТЕЧЕНИЙ

Математическая задача определения поля скоростей **V** вязких течений формулируется в виде закона несжимаемости div **V** = 0 и условия **V** = 0 на границе. В дальнейшем рассмотрении ограничимся линейной связью тензора диэлектрической проницаемости ε_{ij} и тензора скорости деформаций $\dot{e}_{ij}$ (закон Неймана). Компоненты тензора скорости деформаций

$$\dot{e}_{ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial V_k}{\partial x_i}+\frac{\partial V_i}{\partial x_k}\right) \tag{17}$$

равны деформации вектора скорости течения **V**(x,y). Используя представление (3) векторного поля в виде безвихревого τ и соленоидального η полей, поле скоростей представим в виде

$$V_x=\frac{\partial\tau}{\partial x}+\frac{\partial\eta}{\partial y},\quad V_y=\frac{\partial\tau}{\partial y}-\frac{\partial\eta}{\partial x}\,. \tag{18}$$

Томографические измерения в отсутствие магнитного поля ($\beta=0$) позволяют на основе лучевых интегралов (15), (16) и соотношений (7), (9), (11) восстановить только осевую компоненту скорости V_z и потенциал τ [6].

Для определения соленоидальной состовляющей поля преобразуем лучевой интеграл (15), используя условие несжимаемости div **V** = 0, соотношения (17) и (18):

$$H_1 = C\int(\dot{e}_{zz}-\dot{e}_{xx})e^{i\beta y}dy = C\int\left(2\frac{\partial V_z}{\partial z}+\frac{\partial V_y}{\partial y}\right)e^{i\beta y}dy = \{о.ч.\} + a\int\frac{\partial^2\eta}{\partial x\partial y}e^{i\beta y}dy. \qquad (19)$$

Здесь $\{о.ч.\}$ – уже определенная в результате предшествующих измерений (при $\beta = 0$) часть поля; левая часть выражения H_1 – также известна из измерений.

Применяя обратное преобразование Радона к (19), восстанавливаем соленоидальную составляющую векторного поля, а значит, и остальные компоненты поля скоростей V_x и V_y, определенные уравнениями (18). До сих пор для реконструкции соленоидальной составляющей векторного поля скоростей использовалась только доплеровская томография [5].

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДИСПЕРСИИ ДЛЯ РЕКОНСТРУКЦИИ ПОЛЕЙ

Ранее были рассмотрены задачи реконструкции поля напряжений и поля скоростей вязких течений на основе оптических законов Неймана и Максвелла. Реконструкция пластических деформаций в осесимметричном случае была рассмотрена в [11]. Метод реконструкции пластических деформаций для трехмерного случая аналогичен методу реконструкции пластических течений. При этом также используются условие несжимаемости и нулевые граничные условия.

Особому рассмотрению подлежит случай оптического закона Филона – Джессопа. Методика реконструкции течений в двумерном случае базируется на зависимости коэффициентов a и b от частоты (дисперсия). Измеряя оптические параметры на разных частотах, получаем систему уравнений, из которых находим лучевые интегралы раздельно – как для деформаций, так и напряжений [1]. Таким образом, используя представленные выше методики, можно провести реконструкцию деформаций и напряжений в среде, описываемой законом Филона–Джессопа.

Представлены алгоритмы реконструкции напряжений пластических деформаций; поля деформаций для пластических течений и вязких течений. Необходимо отметить, что для реконструкции всех вышеупомянутых характеристик законы состояния среды не использовались (среды с нелинейными механическими свойствами). Существенную роль в реконструкции играет линейность оптических законов. При слабой нелинейности оптических законов представленные алгоритмы могут быть использованы как основа для реконструкции соответствующих полей методом Ньютона–Канторовича.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бугаков И.И.* Фотоползучесть. М.: Наука. 1991.
2. *Cen M., et al.* Integrated birefringence applied to solids and fluids // Experimental Mechanics. Allison. Rotterdam: Balkema. 1998, P. 507–512.
3. *Пуро А.Э.* Интегральная фотопластичность осесимметричного вязкого течения // Оптика и спектроскопия. 1993. Т. 74. № 6. С. 1164–1168.
4. *Ji-Ming Li, et al.* Birefringence and computational studies of a polystyrene Boger fluid in axisymmetric stagnation flow // Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics. 2000. No. 91. P. 189–220.
5. *Sperr G., et al.* Doppler tomography for vector fields // Inverse Problems. 1995. V. 11. P. 1051–1061.
6. *Aben H., Puro A.* Photoelastic tomography for three-dimensional flow birefringence studies // Inverse Problems. 1997. V. 13. P. 215–221.
7. *Puro A.* Magnetophotoelasticity as parametric tensor field tomography // Inverse Problems. 1998. V. 14. P. 1315–1330.
8. *Пуро А.* Параметрическая томография внутренних напряжений // Оптика и спектроскопия. 2001. Т. 90. № 4. С. 664–674.
9. *Tomlinson R.A.* Experiment and modeling of birefringent flows using commercial CFD code // Int. J. of Heat and Fluid Flow. 2006. V. 27. P. 1054–1060.
10. *Абен Х.К.* Интегральная фотоупругость. Таллинн: Валгус. 1975.
11. *Aben H., Puro A., Laerman K.-H.* Axisymmetric nonlinear problems in integrated photomechanics // Proc. 10th Int. Conf. on Experimental Mechanics. Lisbon. 1994. V. 1. P. 83–86.

Parametric Tomography of Three Dimensional Flows

A.E. Puro, A.S. Stulov

In recent years there has been a growing interest in tomographic reconstruction of physical fields. Besides the direct requirements of science and technique for analysis of three-dimensional fields, the advancement in this direction is stimulated with progress in the measuring equipment, and in creation of algorithms of processing of results by the tomography technique.

In this article the possibilities of reconstruction of fields of plastic and viscous flows on the basis of the magnetopolariscope application are studied. The method is based on the flow birefringence measurements. The flow under study is illuminated by the polarised light beam, and the additional rotation of light polarisation, caused by interaction with a flow is registered. The measurements are going on in absence and in the presence of a magnetic field directed along the beam. In this case the plane of polarisation of a light beam transmitted through the flow acquires an additional rotation, caused by the Faraday effect, and this fact increases the representativeness of measurements.

The modern measuring equipment, allows to provide such measurements, while the algorithms of processing of the data obtained are now only at a research stage. Application of polarizing methods for the analysis of TOKAMAK magnetic fields stimulated the creation of the high-speed polarizers and the analyzers, allowing providing the high-precision measurements of parameters of polarization of a beam in a wide optical range.

The application of magnetopolariscopes for reconstruction of residual stresses in the transparent materials (glasses) stimulates the construction of the devices using the powerful enough magnetic fields. The qualitative study of flat and axisymmetric flows of viscous and plastic media has prepared the base for tomographic studies. It is necessary to notice that the algorithm of reconstruction of a stress field in elastic transparent materials earlier has already been developed. In the given work the application of this method on the flows of the complex structure (colloidal solutions, polymers, plastic deformations of various transparent pitches) is generalized. The materials considered are used for modelling and study of important technological and biological processes such as processes of punching and a metals flow, the simulation of blood flow in arterial channels etc.

The algorithm of reconstruction is based on the well investigated stress-optical laws of materials (Maxwell, Neumann, Filon – Jessop laws), and also on the mechanical properties of a flow (the flow is assumed incompressible). From the mathematical point of view, the method of a parametric tomography is based on the exponential Radon transform of an imaginary parameter applied to the reconstruction of vector and tensor fields.

It is shown that application of this method allows essentially to increase the representativeness of the flow parameters determination, and practically to reconstruct the most important characteristics of a flow: for the colloidal flows completely to restore a velocity field and for the plastic flow the total strain-rate field.

УВАЖАЕМЫЕ АВТОРЫ!

Убедительно просим вас оформлять работы, присылаемые в редакцию, строго по нашим правилам. При несоблюдении автором правил оформления статья не принимается редакцией к рассмотрению.