

TALLINNA TEHNIKAÜLIKOOL

Matemaatika-loodusteaduskond

Füüsikainstituut

Martin Lints

**ULTRAHELILAINETE PEEGELDUVUS JA LÄBIVUS
LÕPLIKU PAKSUSEGA KIHILT**

Bakalaureusetöö

Tehniline füüsika

Juhendaja:

Ph.D Andres Braunbrück

Tallinn 2011

*Deklareerin, et käesolev lõputöö on minu iseseisva töö tulemus.
Esitatud materjalide põhjal ei ole varem akadeemilist kraadi taotletud.
Kinnitan, et antud töö koostamisel olen kõikide teiste autorite seisukohtadele, probleemipüstitustele,
kogutud arvandmetele jmt viidanud.*

Töö autor Martin Lints

(allkiri ja kuupäev)

Töö vastab bakalaureusetööle esitavatele nõuetele.

(kuupäev)

Juhendaja Andres Braunbrück

(allkiri)

Sisukord

1	LAINEVÕRRANDI LAHEND	4
2	PINGELAINE PEEGELDUS ÜHELT KESKKONNAPIIRILT	6
2.1	Pinge	6
2.2	Pidevustingimused	7
2.3	Läbivus- ja peegelduskoefitsentide tuletamine	8
3	LÄBIVUS- JA PEEGELDUSKOEFITSENDID LÕPLIKU PAKSUSEGA KIHI JAOKS STATIONAARSEL JUHUL	9
3.1	Peegeldus- ja läbivuskoefitsendid sõltuvana lainepikkuse ja kihi paksuse korrutisest	12
4	LÕPLIKU HARMOONILISE HÄIRITUSE UURIMINE	15
4.1	Plaat vees	17
4.2	Defekt tahkes materjalis	20
	Lisa 1 STATIONAARSE JUHU KOEFITSENTIDE TULETUSKÄIK	27
	Lisa 2 ARVUTUSPROGRAMMI ALGORITM	30

SISSEJUHATUS

Materjalide mittepurustav testimine on arenenud käsikäes digitaaltehnoloogiaga ning arvutusvõimsuste kasvuga. Tänapäeva arvutiprotsessorite suutlikkus täita sekundis miljardeid käske võimaldab analüüsida suurt hulka andmeid piisavalt kiiresti, et reaajas anda infot materjalide omaduste ning mõõtmete kohta. Analüüsitavateks andmeteks on sealjuures ultrahelilainetega mõjutatud materjalides läbinud ja tagasipeegeldunud lained, mille omadused muutuvad läbides erinevate omadustega materjalikihte.

Antud töö keskendub laine pingeamplituudi kirjeldavate teoreetiliste statsionaarse juhu valemite tuletuskäigu näitamisele ning nende võrdlemisele numbrilisest eksperimendist saadud tulemustega juhul kui numbrilises eksperimendis käsitleda mittestationaarset juhtu. Töö üheks eesmärgiks on näidata, milliste eelduste täitmise korral saab kasutada statsionaarse juhu valemiteid ning millistel erijuhtudel tuleks täpsuse tagamiseks kasutada numbrilist lahendamist ning kuidas selle valikuni jõuda.

Töös käsitletakse pikilaine ühemõõtmelist, kadudeta levikut isotroopses, lineaarselt elastses keskkonnas. Need eeldused jäävad kehtima kogu töö ulatuses. Lahendatavate probleemide hulka kuuluvad lõpliku pikkusega harmoonilise häirituse poolt tekitatud laineamplituudide peegeldus- ja läbivuskoeffitsientide sõltuvus häirituse ajalisest pikkusest, sagedusest ja ainekihi paksusest.

Töö autor on arvamisel, et antud valdkonnas on analüütilistel tuletuskäikudel põhinevaid insenerivalemeid võimalik ning kohati otstarbekas asendada üldisemate valemitega, mille puhul tuleks näiteks kasutada numbrilist lähenemist. Arvutusvõimsuste kasv on teinud võimalikuks numbriliste tulemuste saamise ka keerukamate valemitega, mille puhul võib analüütiline lähenemine osutuda ebapraktiliseks.

Antud töös on uuritud, kuidas ning millistel eeldustel tuletuvad levinumad rakendusvalemid kihi peegeldus- ning läbivuskoeffitsiendi arvutamisel (viited [4, lk 19], [9, lk 88]). Edasi on läbi viidud numbrilised katsed kasutades vee, terase ja pleksiklaasi omadusi ning leitud samad koeffitsendid mittestationaarsel juhul.

1 LAINEVÕRRANDI LAHEND

Pikilaine peab rahuldama järgmist diferentsiaalvõrrandit, mida nimetatakse akustiliseks lainevõrrandiks. [5, lk 42].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (1.1)$$

kus u - ühemõõtmelise lainelevi siirdefunktsioon,

x - ruumikoordinaat,

t - aeg ja

c - lainelevi faasikiirus.

Muuhulgas on ka teada, et c avaldub läbi Lamé konstantide (λ ja μ) ja tiheduse (ρ) kujul $c =$

$$\sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \quad [8, lk 169].$$

Leidmaks etteantud ääre- ja algtingimuste korral kehtivat lainelevi lahendit võtame vaatluse alla paremalt poolt piiramata poolruumi (vasakul serval $x = 0$) algtingimustega $u(x, 0) = \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = 0$. Olgu selle poolruumi vasakpoolseks ääretingimuseks harmooniline võnkumine, mis on antud võrrandiga

$$u(0, t) = H(t) \cdot \xi [1 - \cos(\omega t)], \quad (1.2)$$

kus funktsioon u - siirdefunktsioon,

ξ - amplituud,

ω - ringsagedus ning

t - aeg.

Lainevõrrandi lahendi leidmiseks tuleb lahendada osatuletistega diferentsiaalvõrrand (1.1), mida võib teha läbi operaatorarvutusest tuntud Laplace'i teisenduse. Laplace'i teisenduse kasutamiseks kahe muutujaga võrrandis tuleb arvestada, et on x konstantne kui võtta võrrandist muutuja t järgi osatuletist. Siirdefunktsiooni kahekordse ajalise osatuletise Laplace'i teisendus avaldub originaali diferentseerimise abil järgnevalt:

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} \right\} = s^2 U(x, s) - sU(x, 0) - \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \Big|_{t=0},$$

kus lähtudes algtingimusest muutuvad kaks viimast liidetavat nulliks. Kasutades Laplace'i teisendust teist järku osatuletisel $\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$ saame tuletise ja integraali järjekorra ära vahetada, seega asendub kujutamise käigus siirdefunktsiooni võrrand selle Laplace'i kujutusega.

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \right\} = \int_0^\infty \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-st} dt = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty u(x, t) e^{-st} dt = \frac{d^2}{dx^2} U(x, s).$$

Kogu võrrandi kujutus on seega

$$\frac{d^2}{dx^2}U(x,s) - \frac{s^2}{c^2}U(x,s) = 0, \quad (1.3)$$

kus $U(x,s)$ on siirdefunktsiooni Laplace'i teisendus. Võrrand (1.3) on aga harilik konstantsete koordinaatidega diferentsiaalvõrrand, mille lahendamine käib läbi karakteristliku võrrandi

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \frac{s^2}{c^2} = 0 &\Rightarrow (\lambda - \frac{s}{c})(\lambda + \frac{s}{c}) = 0 \\ \lambda_1 = \frac{s}{c}, \lambda_2 = -\frac{s}{c}, \end{aligned}$$

seega on lahend kujutuste ruumis

$$U(x,s) = A(s)e^{\frac{s}{c}x} + B(s)e^{-\frac{s}{c}x},$$

kus $A(s)e^{\frac{s}{c}x}$ kirjeldab koordinaat x negatiivsesse suunda levivat lainet, mida ei ole siin tarvis vaadelda, kuna sellesse ruumiossa antud tingimustel laine ei levi (vaatleme poolruumi), järelikult $A(s) = 0$ ja lahendiks jääb

$$U(x,s) = B(s)e^{-\frac{s}{c}x}. \quad (1.4)$$

Konstandi $B(s)$ leidmiseks peab kasutama tingimust, et kohal $x = 0$ toimub pidev võnkumine vastavalt võrrandile (1.2), millele tuleb samuti rakendada Laplace'i teisendust. Ääritingimuse kujutus on

$$\mathcal{L}\{\xi(1 - \cos(\omega t))\} = \xi \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right) = U(0,s). \quad (1.5)$$

Võrdsustades omavahel (1.5) ja (1.4) kohal $x = 0$ on võimalik avaldada konstant $B(s)$

$$U(0,s) = B(s)e^{-\frac{s}{c} \cdot 0} = B(s) = \xi \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + \omega^2} \right),$$

ning seega avaldub ühemõõtmeline lainevõrrand kujutuste ruumis:

$$U(x,s) = \frac{\xi}{s}e^{-\frac{s}{c}x} - \xi \frac{s}{s^2 + \omega^2}e^{-\frac{s}{c}x}.$$

Selle tagasi originaaliks teisendamine annab lainelevi lahendi ühemõõtmelises paremalt piiramata poolruumis.

$$\begin{aligned} c\mathcal{L}^{-1}\{U(x,s)\} = u(x,t) &= \xi \left\{ H\left(t - \frac{x}{c}\right) - \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) H\left(t - \frac{x}{c}\right) \right\} = \\ &= H\left(t - \frac{x}{c}\right) \xi \left[1 - \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) \right]. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Siit järeldub, et lainelevikut kirjeldava funktsiooni üldine kuju on sarnane võnkumist kirjeldava funktsiooniga, välja arvatud, et lisandub argumendi uus kuju $t - \frac{x}{c}$. Laine levikuks kaugusele x kulub aeg $t = \frac{x}{c}$ (hilistumine) ning siis hakkab punkt kaugusel x võnkuma sagedusega ω ja siirde-

amplituudiga ξ [5, lk 49] [1, lk 45].

Samuti näeme, et poolruumi äärel antud võnkumise kuju (1.2) on vajalik selleks, et see annab lainelevikut kirjeldava lahendi (1.6), mis on pidev kohal $t - \frac{x}{c} = 0$ ka pärast ajalise või ruumilise tuletise võtmist.

Lahendit on võimalik trigonomeetrilise kuju asemel esitada ka eksponentkujul $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. See pakub eeliseid teisendamisel ning omab ka teatud füüsikalist mõtet [8, lk 55]. Seetõttu on eksponentkuju kasutatud ka peatükis 3. Lahendi (1.6) mitteperioodilise osa eksponentsiaalne kuju on näiteks

$$\begin{aligned} -H\left(t - \frac{x}{c}\right) \xi \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) &= -H\left(t - \frac{x}{c}\right) \xi \left(\left\{\cos \omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + i \sin \omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\}\right) = \\ &= -H\left(t - \frac{x}{c}\right) \xi e^{i\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)} = -H\left(t - \frac{x}{c}\right) \xi e^{i(\omega t - kx)} \end{aligned}$$

2 PINGELAINE PEEGELDUS ÜHELT KESKKONNAPIIRILT

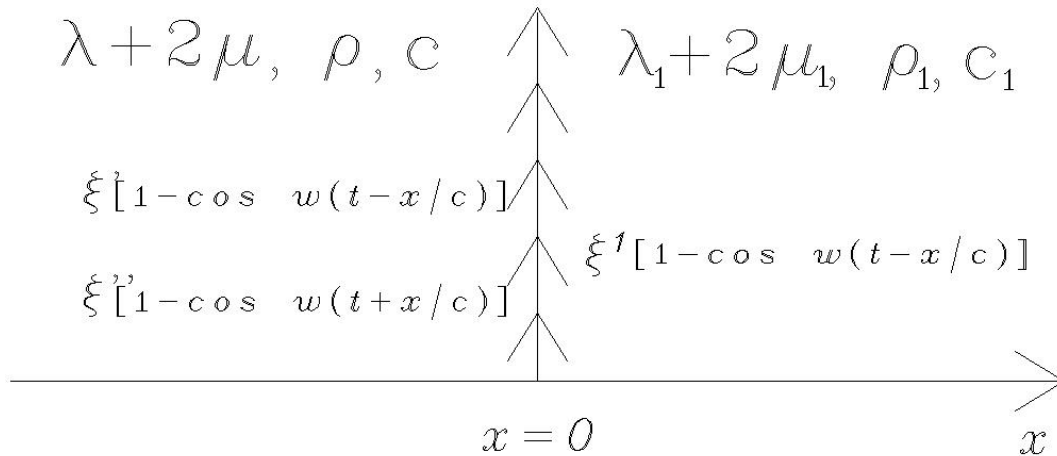
Vaatleme kahe erineva aine liitekohta ühemõõtmelisel juhul. Liitekoht on võetud x -koordinaadi nullpunktiks ning ruum on mõlemalt poolt piiramata (joon. 1). Materjalide omadusi katseliselt määrates lähtutakse paljudel juhtudel mõõtmistel saadud pingest (see võimaldab lihtsate valemite abil leida lainevälja energia ning intensiivsuse) ning ka erialased raamatud (nt. [4]) näitavad raken-dusvalemeid lähtuvalt pingelainest, kasutame võrreldavuse huvides samu füüsikalisi suursi.

Lähtume ülesandest, kus on antud siirdeväli. Seda saab kirjeldada mõlemas suunas liikuvate siirde-lainete superpositsioonina [3]. Vasakpoolses aines levib positiivses suunas liikuv pealelangev laine siirdeamplituudiga ξ' ja negatiivses suunas liikuv, tagasipeegeldunud laine siirdeamplituudiga ξ'' . Parempoolses, jällegi lõpmatu ulatusega aines, eksisteerib vaid läbi piirkihi levinud laine siirde-amplituudiga ξ^1 . Edaspidi on kirjaviisi lihtsustuseks ära jäetud Heaviside'i funktsioon, kuid siiski tuleb mees pidada, et laine ei saa punktis enne mõjuma hakata kuni see pole sinna jõudnud (joonis 1).

2.1 Pinge

Vaatluse alla on võetud lineaarselt elastsed keskkonnad, seega on normaalpinge võrdeline normaal-deformatsiooniga [7]. Pikilaine suhtelise deformatsiooni saame avaldada, kui võtame siirdelainest tuletise x koordinaadi järgi (ühemõõtmeline juht). Isotroopses, lineaarselt elastses keskkonnas on pinge ja defomatsioon omavahel seotud läbi Lamé konstantide λ ja μ järgneva võrrandiga [1, lk 29]

$$T_{km} = \lambda \delta_{km} E_{jj} + 2\mu E_{km},$$



Joonis 1: Ühe materjalidevahelise liitepinnaga ruum

- kus T_{km} - pingetensori komponendid,
 δ_{km} - Kroneckeri sümbol,
 E_{km} - deformatsioonitensori komponendid,
ning on kasutatud Einsteini summeerimiskokkulepet.

Antud töös on vaadeldud ühemõõtmelist pikilaine levikut, seega loobume siinkohal tensorkirjaväest ning kuna elastsuskordaja saab avaldada ka läbi laine faasikiiruse $c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} \Rightarrow \rho c^2 = \lambda + 2\mu$, (kus ρ on aine tihedus), lihtsustub pinge-deformatsiooni seos kujule

$$T(x, t) = \rho c^2 \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \quad (2.1)$$

2.2 Pidevustingimused

- Olgu liitepinnal materjalid pidevalt teineteise vastas, st võnkumise kestel ei teki nende vahele mingit pragu. Sellisel juhul peab mõlemas ruumipooles levivate lainete siirdeväli kohal $x = 0$ olema võrdne.

$$u(0, t) = u_1(0, t)$$

$$\xi'(1 - \cos \omega t) + \xi''(1 - \cos \omega t) = \xi^1(1 - \cos \omega t)$$

- Siirete võrdsusest järeldeb ka kiiruste võrdsus liitepinnal $x = 0$. See on eelmisest tingimusest lineaarselt sõltuv.

$$u_{,t}(x, t) \stackrel{x=0}{=} u_{,t}^1(x, t).$$

- Arvestades, et liitepinna pindala on konstantne ning tulenevalt sellest, et ainete pooled mõju-

tavad teineteist võrdvastupidiste jõududega saame, et normaalpinged on võrdsed.

$$T(0,t) = \rho c^2 \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = \rho_1 c_1^2 \frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x} \Big|_{x=0} = T_1(0,t).$$

kus ρc^2 ja $\rho_1 c_1^2$ - võrdsustatud elastsuskordajatega,
 $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ ja $\frac{\partial u_1(x,t)}{\partial x}$ - deformatsioonid ning
 $T(0,t)$ ja $T_1(0,t)$ - normaalpinged.

2.3 Läbivus- ja peegelduskoefitsientide tuletamine

Võrdsustame vasakus ja paremas ruumipooles levivad pinge- ja siirdelaineväljad. Eesmärgiks on saada lõppvalemid läbi pingeamplituudide suhete, seega tuleb esmalt leida pingelainete võrrandid ning nende amplituudide järgi avaldada siirdeamplituudid. Kuna keskkonnas eksisteerivat pingelainevälja saab samuti kirjeldada üksikute pingelainete superpositsioonina, leiame nende üksikute pingelainete võrrandid. Selleks tuleb leida üksikute siirdelainete võrrandite tuletised x järgi

- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\xi' \left[1 - \cos \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \right] \right) = -\xi' \frac{\omega}{c} \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\},$
- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\xi'' \left[1 - \cos \left\{ \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right\} \right] \right) = \xi'' \frac{\omega}{c} \sin \left\{ \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right\},$
- $\frac{\partial}{\partial x} \left(\xi^1 \left[1 - \cos \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} \right] \right) = -\xi^1 \frac{\omega}{c} \sin \left\{ \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\},$

ning korrutada elastsuskordajaga. Pingete võrdsus liitepinnal $x = 0$:

$$\begin{aligned} \rho c^2 \left(-\xi' \frac{\omega}{c} \sin \omega t + \xi'' \frac{\omega}{c} \sin \omega t \right) &= -\rho_1 c_1^2 \xi^1 \frac{\omega}{c_1} \sin \omega t, \\ -\rho c \xi' \omega \sin \omega t + \rho c \xi'' \omega \sin \omega t &= -\rho_1 c_1 \xi^1 \omega \sin \omega t \end{aligned} \quad (2.2)$$

Defineerin pingeamplituudid järgmiselt:

$$A' = -\rho c \xi' \omega \quad A'' = \rho c \xi'' \omega \quad A^1 = -\rho_1 c_1 \xi^1 \omega. \quad (2.3)$$

Võrrandist (2.2) taanduvad siinused maha ning pingete võrrand antud juhul kohal $x = 0$ saab järgmise kuju:

$$A' + A'' = A^1. \quad (2.4)$$

Leiame ka võrrandi, mis kirjeldab siirdeid liitepinnal (vt joon. 1):

$$\xi' (1 - \cos \omega t) + \xi'' (1 - \cos \omega t) = \xi^1 (1 - \cos \omega t),$$

$$\xi' + \xi'' = \xi^1.$$

Avaldame siirdeamplituudid ξ läbi pingeamplituudide (2.3):

$$\xi' = -\frac{A'}{\rho c \omega} \quad \xi'' = \frac{A''}{\rho c \omega} \quad \xi^1 = -\frac{A^1}{\rho_1 c_1 \omega} .$$

Võrrand saab kuju:

$$\frac{A'}{\rho c} - \frac{A''}{\rho c} = \frac{A^1}{\rho_1 c_1},$$

$$\rho_1 c_1 A' - \rho_1 c_1 A'' = \rho c A^1. \quad (2.5)$$

Nüüd saab võrranditest (2.4) ja (2.5) moodustada süsteemi, kust on võimalik avaldada pingeamplituudide suhe, leidmaks peegeldus- ja läbivuskoeffitsendid $R = \frac{A''}{A'}$ ja $D = \frac{A^1}{A'}$.

$$\begin{cases} A' + A'' = A^1 \\ \rho_1 c_1 A' - \rho_1 c_1 A'' = \rho c A^1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + \frac{A''}{A'} = \frac{A^1}{A'} \\ \rho_1 c_1 - \rho_1 c_1 \frac{A''}{A'} = \rho c \frac{A^1}{A'} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 + R = D \\ \rho_1 c_1 - \rho_1 c_1 R = \rho c D \end{cases} . \quad (2.6)$$

Tasakaal elastsuse ja inertsi vahel tuleb lineaarseks võrduseks pinge T ja osakese kiiruse $u_t(x, t)$ vahel kujul $T = z u_t(x, t)$, kus z on *akustiline impedants* $z = \rho c$ [6, lk 21]. Lahendades süsteemi (2.6) ning avaldades selle ka impedantside $z = \rho c$ ja $z_1 = \rho_1 c_1$ kaudu saab peegelduskoeffitsendiks

$$R = \frac{\rho_1 c_1 - \rho c}{\rho c + \rho_1 c_1} = \frac{z_1 - z}{z + z_1}, \quad (2.7)$$

ning läbivuskoeffitsendiks

$$D = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho c + \rho_1 c_1} = \frac{2z_1}{z + z_1}. \quad (2.8)$$

Juhime siinkohal tähelepanu, et pingeamplituudi peegeldus- ja läbivuskoeffitsendi valemite tuletamisel ei läinud tarvis laine protsessi statsionaarsuse tingimust, seega kehtivad need võrrandid igal ajahetkel ning ei eelda statsionaarsust, järelkult saab neid kasutada lühikeste impulsside analüüsimisel.

3 LÄBIVUS- JA PEEGELDUSKOEFIITSENDID LÕPLIKU PAKSUSEGA KIHI JAOKS STATSIONAARSEL JUHUL

Vaatleme kahe piirkihiga keskkonda, kus keskmine osa on teistsuguse tiheduse ja pikilaine faasi-kiirusega kui vasakpoolne ja parempoolne. Olgu vasakpoolne piirkiht kohal $x = 0$ ja parempoolne kohal $x = d$. Seega on vahepealse, esialgsest erineva elastsuskordajaga ($\lambda_1 + 2\mu_1$) kihi paksus d (vt joon 2). Seekord on trigonomeetriliste võrrandite asemel kasutusel lainelevi eksponentsiaalne kirjeldus, mis võimaldab tuletuskäigus väikese vaevaga välja taandada ajalised sõltuvused.

Joonisel 2 on näidatud järgmine siirdelaineväli: ξ' on materjalide liitepinnale $x = 0$ pealelangeva

laine amplituud ning ξ'' on pinnalt $x = 0$ peegeldunud laine amplituud, η' on pinna $x = 0$ läbinud ja pinnale $x = d$ pealelangeva laine amplituud ja η'' on pinnalt $x = d$ peegeldunud laine amplituud, ξ^1 on pinna $x = d$ läbinud laine amplituud.

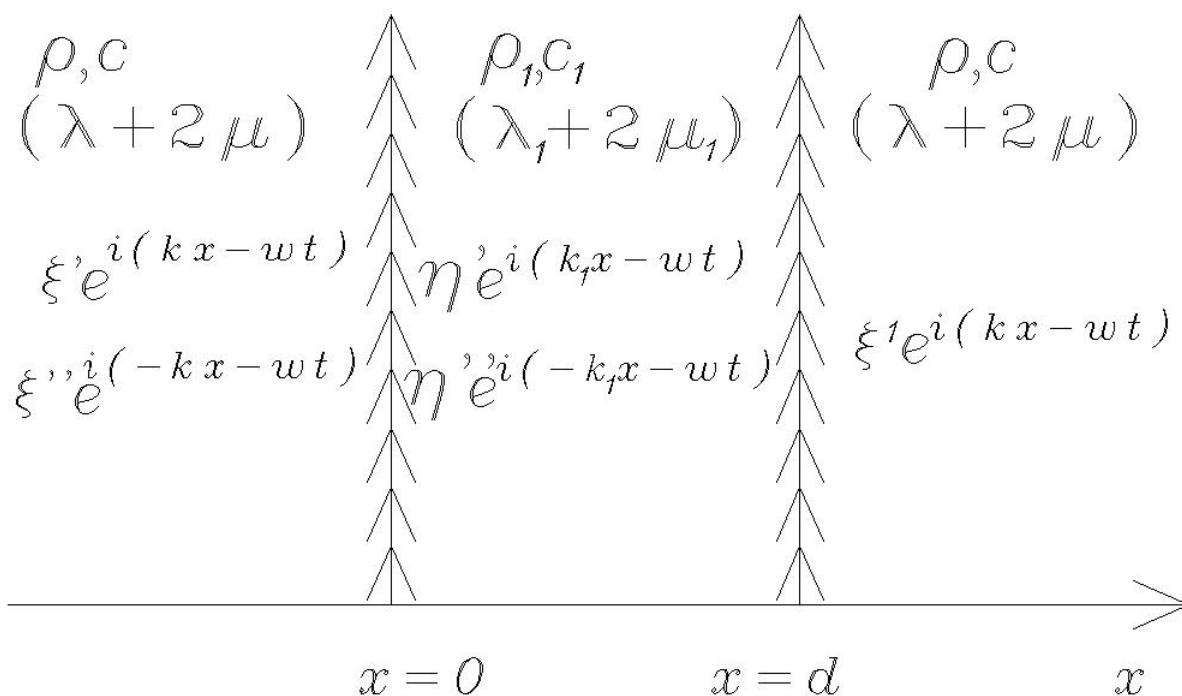
Siirdelainete perioodilise osa eksponentsiaalne kirjeldus olgu antud järgmiste valemitega:

$$\begin{aligned}\xi' \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) &= \xi' \left\{ \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) - i \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} = \xi' e^{i(kx - \omega t)}, \\ \xi'' \cos \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) &= \xi'' \left\{ \cos \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) - i \sin \omega \left(t + \frac{x}{c} \right) \right\} = \xi'' e^{i(-kx - \omega t)}, \\ \xi^1 \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) &= \xi^1 \left\{ \cos \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) - i \sin \omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right\} = \xi^1 e^{i(kx - \omega t)},\end{aligned}$$

kus $k = \frac{\omega}{c}$.

Analoogiliselt kehtivad ruumis $0 < x < d$ (vt joon. 2) lainelevi võrrandid, kus $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$

$$\eta' e^{i(k_1 x - \omega t)} \quad \eta'' e^{i(-k_1 x - \omega t)}.$$



Joonis 2: Kaks liitepinda

Järgneva tuletuskäigu eesmärgiks on saada peegeldus- ja läbivuskoeffitsendid sõltuvana pealelangeva laine pingeamplituudist, seega on uuritud erijuhtu, kus pealelangev laine on lõpmata pikk, mistõttu on välja kujunenud statsionaarne olukord, kus amplituudid ei sõltu enam ajast [4, lk 18].

Pingelainete võrdus kohal $x = 0$. Tuletuskäigus arvestame, et $k = \frac{\omega}{c}$ ning $k_1 = \frac{\omega}{c_1}$.

$$\rho c^2 \left(i \frac{\omega}{c} \xi' e^{ikx} e^{-\omega t} - i \frac{\omega}{c} \xi'' e^{-ikx} e^{-\omega t} \right) \stackrel{x=0}{=} \rho_1 c_1^2 \left(i \frac{\omega}{c_1} \eta' e^{ik_1 x} e^{-\omega t} - i \frac{\omega}{c_1} \eta'' e^{-ik_1 x} e^{-\omega t} \right),$$

$$\rho c \omega \xi' e^{ikx} e^{-\omega t} - \rho c \omega \xi'' e^{-ikx} e^{-\omega t} \stackrel{x=0}{=} \rho_1 c_1 \omega \eta' e^{ik_1 x} e^{-\omega t} - \rho_1 c_1 \omega \eta'' e^{-ik_1 x} e^{-\omega t}.$$

Vastavad pingeamplituudid avalduvad

$$A' = -\rho c \omega \xi' \quad A'' = \rho c \omega \xi'' \quad B' = -\rho_1 c_1 \omega \eta' \quad B'' = \rho_1 c_1 \omega \eta'' ,$$

ning siirdeamplituudid läbi pingeamplituudide

$$\xi' = -\frac{A'}{\rho c \omega} \quad \xi'' = \frac{A''}{\rho c \omega} \quad \eta' = -\frac{B'}{\rho_1 c_1 \omega} \quad \eta'' = \frac{B''}{\rho_1 c_1 \omega} . \quad (3.1)$$

Seega rahuldavad pingelainete amplituudid kohal $x = 0$ tingimust

$$A' + A'' = B' + B''.$$

Kohal $x = d$ kehtib pingete võrdus järgneval kujul

$$\rho_1 c_1^2 \left(ik_1 \eta' e^{i(k_1 x - \omega t)} - ik_1 \eta'' e^{i(-k_1 x - \omega t)} \right) \stackrel{x=d}{=} \rho c^2 ik \xi^1 e^{i(kx - \omega t)},$$

$$\rho_1 c_1 \omega \eta' e^{ik_1 d} - \rho_1 c_1 \omega \eta'' e^{-ik_1 d} = \rho c \omega \xi^1 e^{ikd}.$$

Siin $A^1 = -\rho c \omega \xi^1$ ning $\xi^1 = -\frac{A^1}{\rho c \omega}$

$$B' e^{ik_1 d} + B'' e^{-ik_1 d} = A^1 e^{ikd}.$$

Siirdelainete võrdus kohal $x = 0$

$$\xi' e^{i(kx - \omega t)} + \xi'' e^{i(-kx - \omega t)} \stackrel{x=0}{=} \eta' e^{i(k_1 x - \omega t)} + \eta'' e^{i(-k_1 x - \omega t)},$$

$$\xi' e^{-i\omega t} + \xi'' e^{-i\omega t} = \eta' e^{-i\omega t} + \eta'' e^{-i\omega t},$$

$$\xi' + \xi'' = \eta' + \eta''.$$

Kasutades (3.1) saame võrrandi avaldada läbi pingeamplituudide

$$\frac{A'}{\rho c} - \frac{A''}{\rho c} = \frac{B'}{\rho_1 c_1} - \frac{B''}{\rho_1 c_1}.$$

Siirdelainete võrdus kohal $x = d$

$$\eta' e^{ik_1 d} \cdot e^{-i\omega t} + \eta'' e^{-ik_1 d} \cdot e^{-i\omega t} = \xi^1 e^{ikd} \cdot e^{-i\omega t},$$

$$\eta' e^{ik_1 d} + \eta'' e^{-ik_1 d} = \xi^1 e^{ikd}.$$

Kasutades (3.1)

$$\frac{B'}{\rho_1 c_1} e^{ik_1 d} - \frac{B''}{\rho_1 c_1} e^{-ik_1 d} = \frac{A'}{\rho c} e^{ikd},$$

saame süsteemi pingete jaoks:

$$\begin{cases} A' + A'' = B' + B'' \\ B' e^{ik_1 d} + B'' e^{-ik_1 d} = A^1 e^{ikd} \end{cases}, \quad (3.2)$$

ja siiretele:

$$\begin{cases} \rho_1 c_1 (A' - A'') = \rho c (B' - B'') \\ \rho c (B' e^{ik_1 d} - B'' e^{-ik_1 d}) = \rho_1 c_1 A^1 e^{ikd} \end{cases}. \quad (3.3)$$

Võrrandisüsteemide (3.2) ja (3.3) lahendmine ning lahendite moodulite leidmine (kuna lahendid on algselt kompleksarvulised) annab peegeldus- ja läbivuskoeffitsendid. Edasine tuletuskäik on puhtalt matemaatilise väärtusega ning on toodud lisas Lisa 1. Peegeldus- ja läbivuskoeffitsent avalduvad kujul:

$$R_{kiht} = \frac{\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)^2 + 4 \cot^2(k_1 d)}}, \quad (3.4)$$

$$D_{kiht} = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(k_1 d) + \frac{1}{4} \sin^2(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)^2}}. \quad (3.5)$$

On lihtne kontrollida, et koeffitsendid R_{kiht} ja D_{kiht} vastavad energia jäävuse seadusele $R^2 + D^2 = 1$ (laine intensiivus on võrdeline nii energiaga kui ka pinge ruuduga, vt [4, lk 13 ja 17] ja [2, lk 71-72]) ning ühtlasi vastavad lõpptulemustele, mis on toodud Rayleigh [9, lk 88] ja Krautkrämeri [4, lk 19] raamatutes.

3.1 Peegeldus- ja läbivuskoeffitsendid sõltuvana lainepikkuse ja kihi paksuse korrutisest

Kuna valemid (3.4) ja (3.5) sõltuvad mitmest muutujast, tuleb mõtestatud graafiku esitamiseks mõned parameetrid ette anda. Seega valime esialgu järgnevad materjalid ning parameetrid, mida arvutustes kasutada:

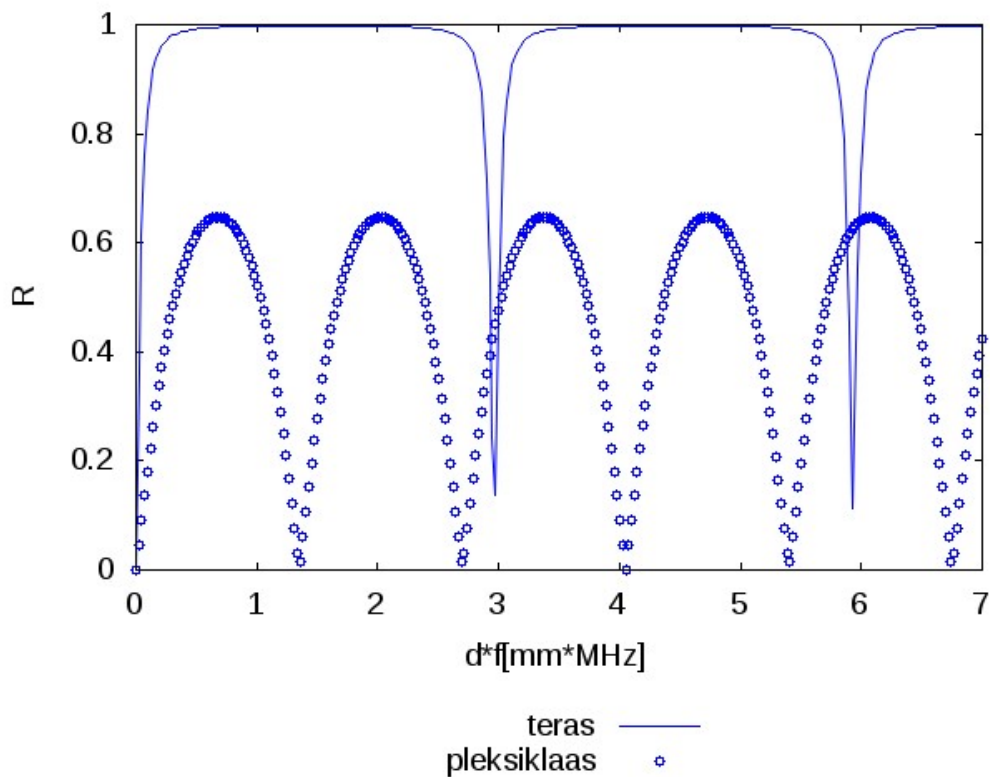
- vesi - tihedus $\rho = 1000 \frac{kg}{m^3}$, laine faasikiirus $c = 1484 \frac{m}{s}$

Materjalide mittepurustavas testimises on vee näol tegu hea keskkonnaga, mille abil saab ühendada ultrahelilaineid genereerivad ja vastuvõtavad andurid viisil, mis välistab madala impedantsiga materjalikihi (nt õhupragu) jäämise saatja/vastuvõtja ja katsekeha vahele. Madala

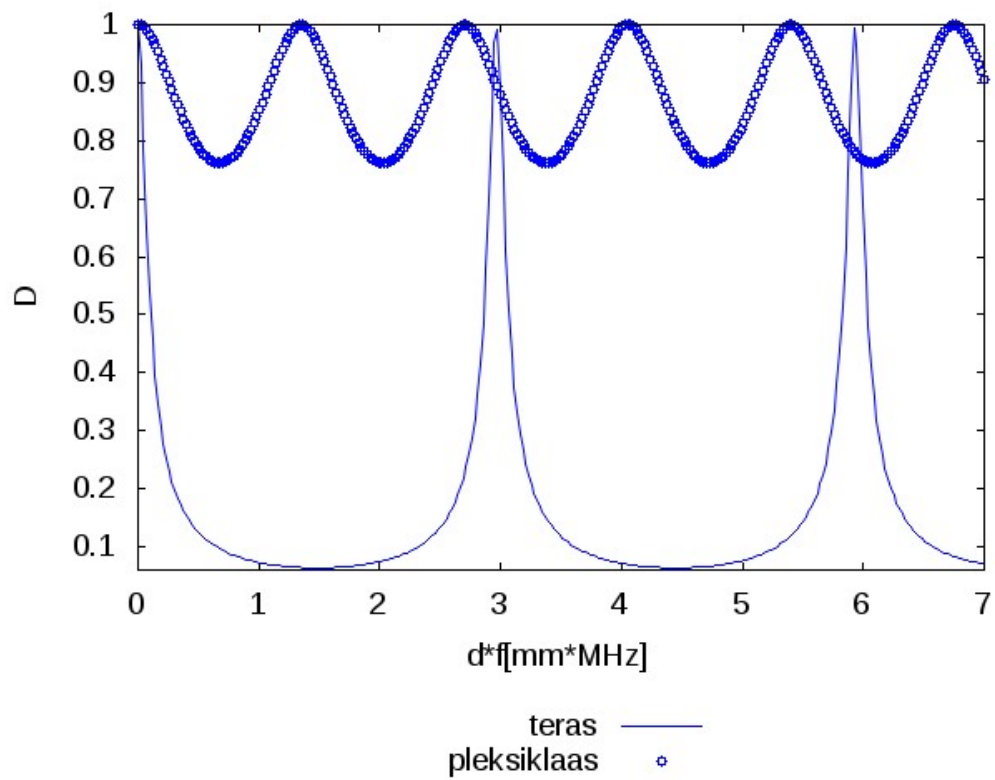
impedantsiga kihi läbivuskoeffitsent on väike, seega vähendab iga selline pragu katsekehasse jõudva pinge amplituudi [4, lk 18] ning moonutab mõõtetulemust juhul kui eesmärgiks on katsekeha akustilise impedantsi määramine.

- teras - tihedus $\rho = 7860 \frac{kg}{m^3}$, laine faasikiirus $c = 5930 \frac{m}{s}$ Tegu on kõrge impedantsiga ning tööstuses laiadaset levinud materjaliga. Ultraheli kasutatakse laialdaselt terase keevisõmb-luste kvaliteedikontrolliks.
- pleksiklaas - tihedus $\rho = 1189 \frac{kg}{m^3}$, laine faasikiirus $c = 2700 \frac{m}{s}$ Pleksiklaas on keskmise akus-tilise impedantsiga aine, toodud näitamaks graafikute sõltuvust aine tiheduse ja ultrahelilaine faasikiiruse korrutisest võrreldes vee ja terasega.

Graafikud on valmistatud GNU Octave matemaatikapaketi abil. Joonised 3 ja 4 näitavad vastavalt peegeldus ja läbivuskoeffitsendi sõltuvust materjalikihi paksuse ja sageduse korrutisest, kui mater-jaliks on vette paigutatud pleksiklaasi- või teraseleht.



Joonis 3: Peegelduskoeffitsendid pleksiklaasilt ja teraselt, sõltuvana sageduse f ja kihi laiuse d korrutisest statsionaarsel juhul



Joonis 4: Läbivuskoeffitsendid pleksiklaasilt ja teraselt sõltuvana sageduse f ja kihi laiuse d korrutisest statsionaarsel juhul

4 LÕPLIKU HARMOONILISE HÄIRITUSE UURIMINE

Teoreetilised valemid peegeldunud ning läbinud pingeamplituudide jaoks sai tuletatud eeldusel, et lained mis mõjuvad on statsionaarsed. Nüüd vaatleme aga juhtu, kui sellist eeldust teha ei saa ehk siis kui harmooniline häiritus on lõpliku pikkusega ja statsionaarne olukord ei jõua välja kujuneda ning lainete superpositsiooni summa väärtus sõltub veel ajast.

See pakub praktilisest seisukohast huvi, kuna ka lõpliku pikkusega signaalide puhul võidakse kasutada statsionaarse olukorra peegeldus- ja läbivuskoeffitsentide valemid [4, lk 22], kuid järgnevas uurime, kas ja kui suur on vahe mittestatsionaarse olukorraga.

Selleks et modelleerida lõpliku pikkusega häirituse levi vaatleme eelneva peatükiga sama materjalide paigutust (joonis 2), millele vastav laine frontide levi on toodud joonisel 5. Olgu $x = 0$ pealangev laine ühikulise amplituudiga. Vasakpoolses keskkonnas $x < 0$ kujuneb algse pingelaine peegelduste liitumisel välja lainete superpositsioon, mida võib väljendada koosinus-summana:

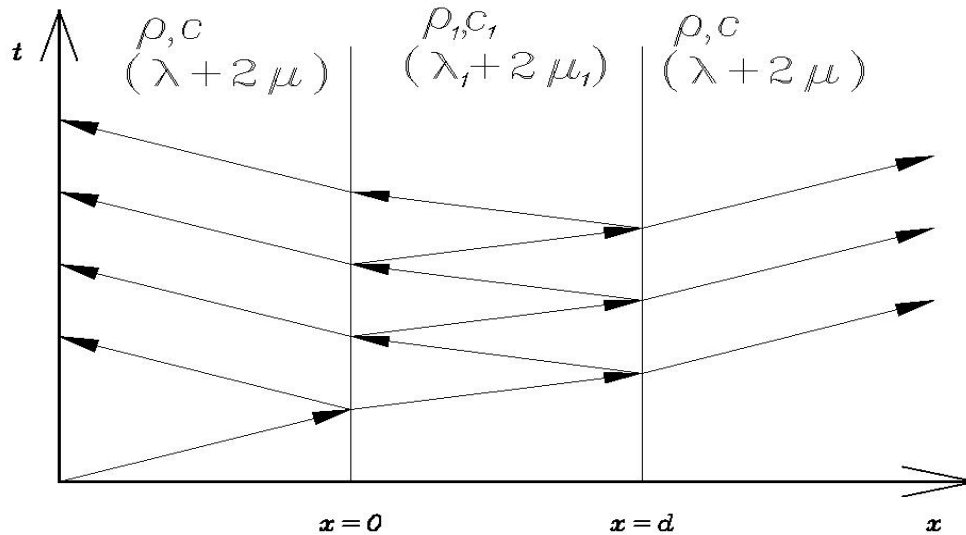
$$\begin{aligned} R \cos(\omega t) - RDD_{-1} \cos \omega \left(t - \frac{2d}{c_1} \right) - R^3 DD_{-1} \cos \omega \left(t - \frac{4d}{c_1} \right) \dots = \\ = R \cos 2\pi f t - \sum_1^k R^{2k-1} DD_{-1} \cos 2\pi f \left(t - \frac{2kd}{c_1} \right), \end{aligned} \quad (4.1)$$

kus esimene liige tähistab pealangenud laine peegeldust $R \cos(\omega t)$. Teine liige iseloomustab $x = 0$ läbinud, pinnalt $x = d$ tagasipeegeldunud ning uuesti $x = 0$ läbinud lainet, mille amplituud on seega $-RDD_{-1}$. Kuna laine on läbinud materjali $0 < x < d$ kaks korda, toimub hilistumine $\frac{2d}{c_1}$. Amplituud on miinusemärgiga, sest seekord on peegeldumisel esialgsega vastupidine materjalide järjestus. Kolmas summa liige iseloomustab kihis $0 < x < d$ kolm korda peegeldunud ja siis tagasi $x < 0$ liikunud lainet, mille amplituud on seega $-R^3 DD_{-1}$. Et see laine on neli korda läbinud kihi $0 < x < d$, mõjub hilistumine $\frac{4d}{c_1}$. Summa jätkub analoogiliselt.

Valemis (4.1) tähistab $R = \frac{\rho_1 c_1 - \rho c}{\rho_1 c_1 + \rho c}$ peegelduskoeffitsenti keskkonda $x < 0$. Peegeldus keskkonda $0 < x < d$ on sellisel juhul $-R$. Läbivuskoeffitsent kui laine läheb keskkonda $0 < x < d$ on $D = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho c}$. Läbivuskoeffitsent kui laine läheb keskkonda $x < 0$ või $x > d$ on $D_{-1} = \frac{2\rho c}{\rho_1 c_1 + \rho c}$.

Keskkonnas $x > d$ avaldub pingelainete summa, mis annab läbivuskoeffitsendi, järgmisel kujul:

$$\begin{aligned} DD_{-1} \cos \omega \left(t - \frac{d}{c_1} \right) + R^2 DD_{-1} \cos \omega \left(t - \frac{3d}{c_1} \right) + R^4 DD_{-1} \cos \omega \left(t - \frac{5d}{c_1} \right) + \dots = \\ = \sum_0^k R^{2k} DD_{-1} \cos 2\pi f \left(t - \frac{(1+2k)d}{c_1} \right), \end{aligned} \quad (4.2)$$



Joonis 5: Lõpliku pikkusega lainete levik

kus esimene liige näitab pingelainet, mis on materjali $0 < x < d$ läbinud otse, ilma peegelduseta. Kuna see on läbinud materjali ühe korra, toimub ajaline hilistumine $\frac{d}{c_1}$ ($t = 0$ kui pingelaine langeb pinnale $x = 0$). Teine liige on materjalis $0 < x < d$ peegeldunud kaks korda ehk läbinud selle kolm korda, millest tuleneb amplituud $R^2 DD_{-1}$ ning hilistumine $\frac{3d}{c_1}$. Kolmas liige on analoogiliselt peegeldunud materjalis $0 < x < d$ neli korda e. läbinud selle viis korda, millest saame amplituudi $R^4 DD_{-1}$ ning hilistumise $\frac{5d}{c_1}$. Füüsikalisest seisukohast lähtudes peaks valemid (4.1) ja (4.2) koonduma väärtusele, mida annavad vastavalt valemid (3.4) ja (3.5).

Mittestatsionaarse lainevälja peegeldus- ja läbivuskoeffitsientide valemid (4.1) ja (4.2) kirjeldavad olukorda, kus pingeamplituudide koeffitsendid sõltuvad ajahetkest, mil neid mõõdetakse e. tegu on mittestatsionaarse olukorraga. See väljendub tingimuses, et summas (4.1) ja (4.2) on liikmed nullist erinevad vaid juhul kui koosinuse argument on suurem nullist (sest Heaviside funktsiooni me kokkuleppeliselt ei kirjuta). Selleks, et läbivus- ja peegelduskoeffitsente saaks võrrelda statsionaarsel ja mittestatsionaarsel juhul, peame leidma valemitega (4.1) ja (4.2) antud võnkumiste maksimumväärtused. Illustreerimaks mittestatsionaarse juhu peegelduvus- ja läbivuskoeffitsientide graafikuid on vaja küllalt suurt punktide hulka. Et igal kohal maksimumi leidmiseks tuleb teha palju arvutusi, on see töö tehtud arvutil kasutades GNU Octave'i matemaatikapaketti.

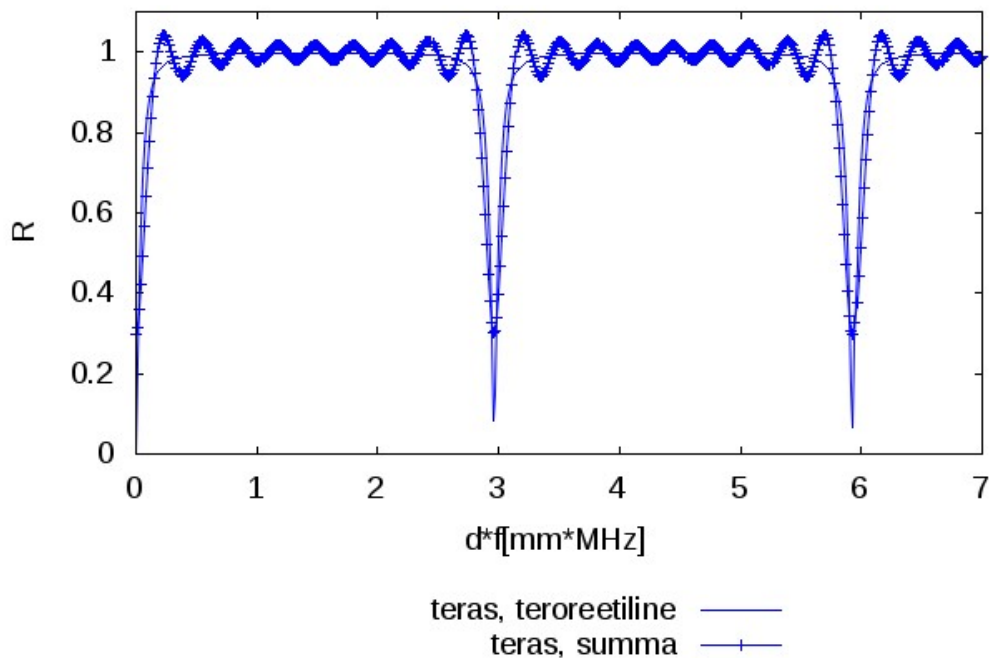
Koostatud programm (algoritm on lisas Lisa 2) leiab kõigepealt vastavalt etteantud sagedusvahemikule, punktide tihedusele graafikul ning ainete füüsikalistele parameetritele alapeatükis 3.1 leitud kihi peegeldus- ja läbivuskoeffitsientide (statsionaarne juht) graafikud (nagu joonistel 3 ja 4). Samale graafikule kujutatakse koosinuste summa abil leitud arvutuste tulemused, kus on leitud valemitega (4.2) ja (4.1) antud võnkumiste amplituudid $k + 1$ liikme korral (liikmete arv iseloomustab lõpliku häirituse kestvust). Arvutustes leitava häirituse ajaline kestvus on seega sõltuvuses summa (4.1) või

(4.2) liikmete hulgast ja materjali $0 < x < d$ paksusest d , ning pöördvõrdelises sõltuvuses materjali $0 < x < d$ laine faasikiirusest c_1 .

4.1 Plaat vees

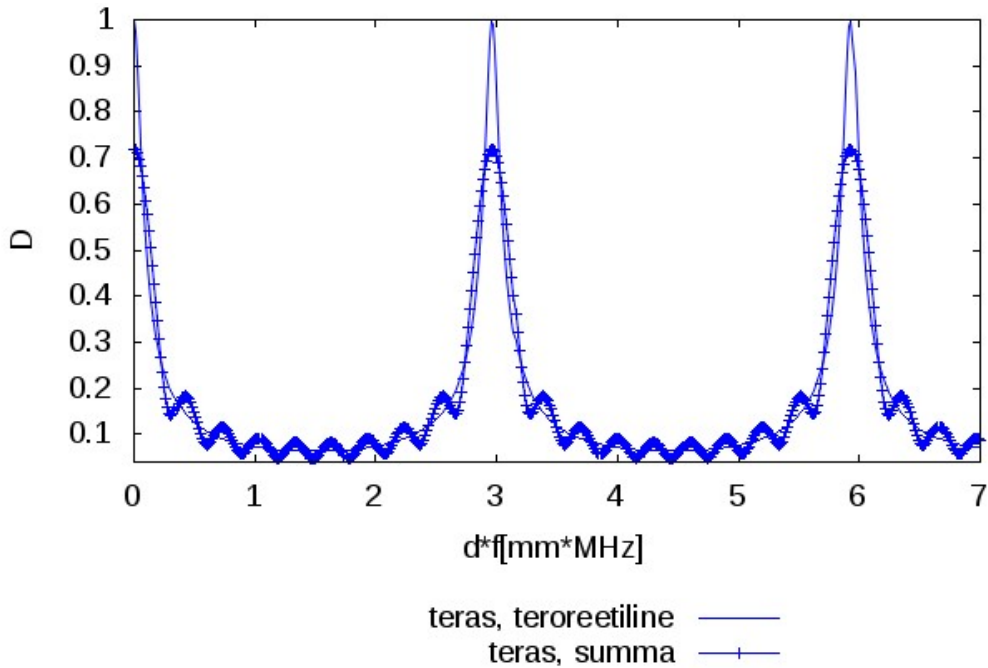
Alljärgnevatelt joonistelt 6 ja 7 võib näha, et suuremate akustiliste impedantside suhete korral $\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \gg 1$ on isegi 10 liikmega koosinus-summa ja statsionaarse juhu vahel piisavalt oluline erinevus, st piisavalt lühikeste impulsside korral (sõltuvalt vahepealse kihi laiusel d) ei kattu statsionaarse ja mittestatsionaarse juhu koefitsentide tulemused. Impedantside vahe vähenedes väheneb ka vajalik liikmete arv $k + 1$, et mittestatsionaarne juht annaks sama tulemuse kui statsionaarne. Kui vaadelda pleksiklaasi kihti vees (joonised 8 ja 9) piisab valemite (4.1) ja (4.2) juba kahest summa liikmest, et saavutada küllalt hea kattumine statsionaarse juhuga, st sama tulemus kujuneb summa liikmeid lugedes välja põhimõtteliselt hetkeliselt - kolmanda liikme juurdevõtmisel graafikud praktiliselt kattuvad. Piisava hulga liikmete arvestamisel hakkavad graafikud siiski kattuma ka terase puhul. Täpne häirituse pikkus mil tuleks üle minna ühelt teisele sõltub loomulikult ka paljudest muudest parameetritest, mida antud töö maht ei võimalda käsitleda.

Valemitest (3.4), (3.5), (4.1) ja (4.2) on näha, et laine sagedus ja kihi paksus mõjutavad peegeldus- ja läbivuskoeffitsente samamoodi. Järgnevate jooniste numbrilistes eksperimentides võeti kihi paksus konstantseks ja muudeti sagedust vastavas vahemikus, kuid algoritmi muutes oleks ka vastupidi saanud teha ja tulemus oleks olnud sama.



Joonis 6: Terase peegelduskoeffitsendi sõltuvus plaadi paksuse ja laine sageduse korrutisest, kui summa (4.1) on 10 liikmega

Võrdluse mõttes näitame, et kui summasse (4.1) võtta 10 liiget siis $10 = k + 1 \Rightarrow k = 9$ ja vees oleva 1mm paksuse terasplaadi puhul kulub kõigi liikmete kehtima hakkamiseni aeg $t = \frac{2kd}{c_1} = \frac{18 \cdot 0.001}{5930} = 3.04 \cdot 10^{-6} \text{ s}$

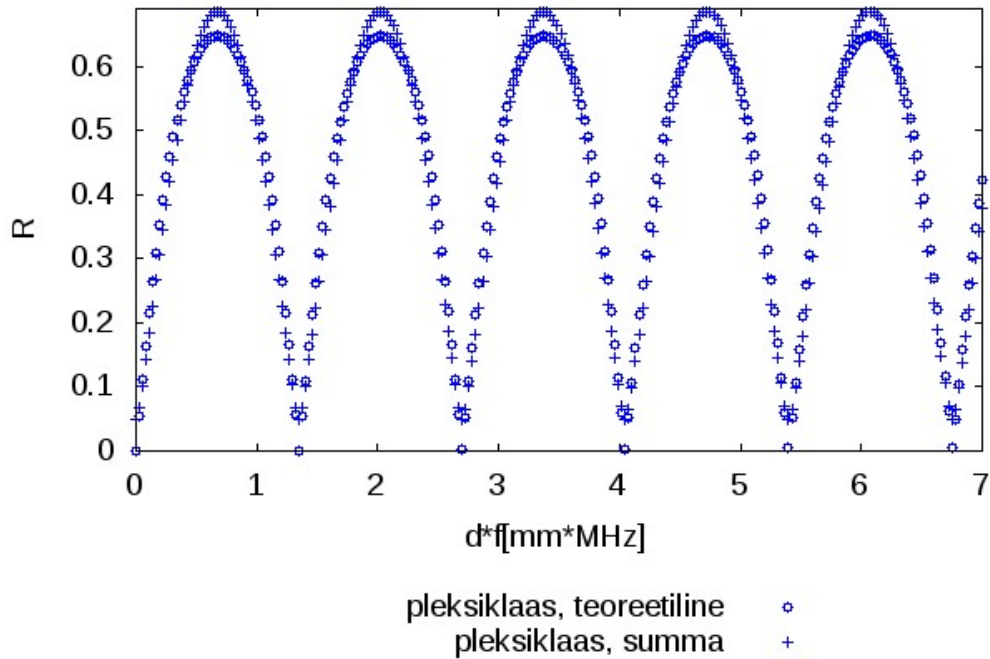


Joonis 7: Teraseläbivuskoeffitsendi sõltuvus plaadi paksuse ja laine sageduse korrutisest, kui summa (4.2) on 10 liikmega

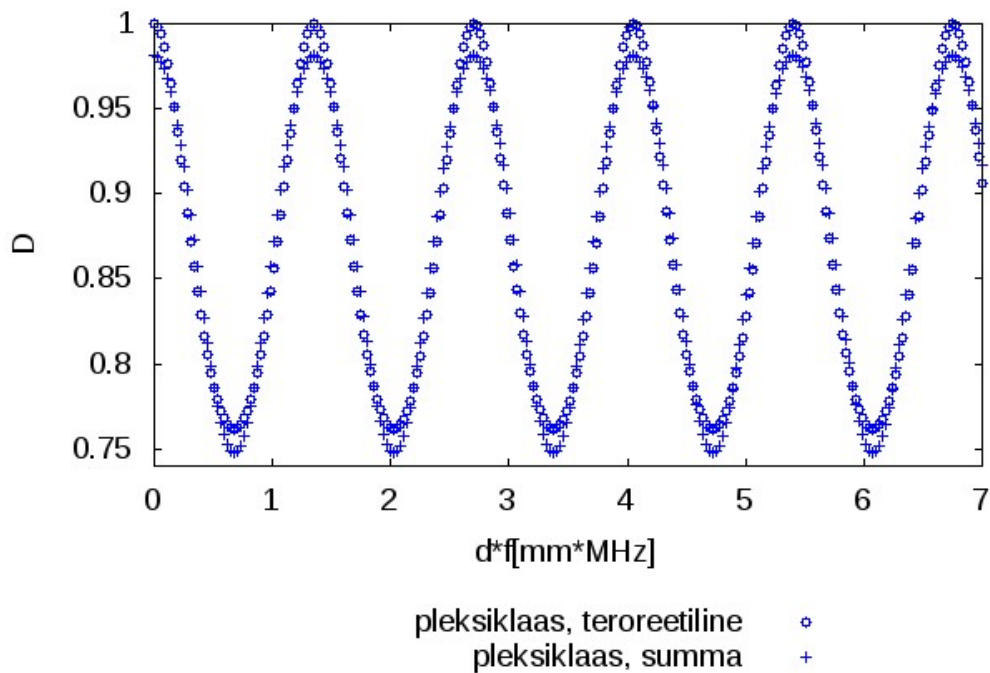
Läbivuskoeffitsendi puhul on näha, et kui läbivuse väljakujunemiseks kulunud aega mõõta hetkest, mil esimene laine jõuab kohale $x = d$, kulub väljakujunemiseks sama aeg mis vastava hulga liikmetega peegelduskoeffitsendi jaoks $t = \frac{(1+2k)d}{c_1} - \frac{d}{c_1} = \frac{2kd}{c_1}$ ehk 1mm paksu terase puhul jällegi $t = 3.04 \mu\text{s}$.

1mm paksu pleksiklaasiplaadi puhul (joon. 8 ja 9) on kahe liikme puhul vastav aeg nii peegelduskoeffitsendi kui ka läbivuskoeffitsendi jaoks (meeles pidada, et peegelduskoeffitsendi kujunemise aeg algab siin hetkest mil laine jõuab piirkihile $x = 0$ ja peegelduskoeffitsendi puhul piirkihile $x = d$) $\frac{2kd}{c_1} = \frac{2 \cdot 0.001}{2700} = 7.41 \cdot 10^{-7} \text{ s}$.

Toodud aegadele lisandub arvutusprogrammis kuni ühe võnkumisperioodi suurune aeg, mis on tarvilik maksimaalse väärtuse leidmiseks.



Joonis 8: Pleksiklaasi peegelduskoeffitsendi sõltuvus plaadi paksuse ja laine sageduse korrutisest, kui summa (4.1) on 2 liikmega

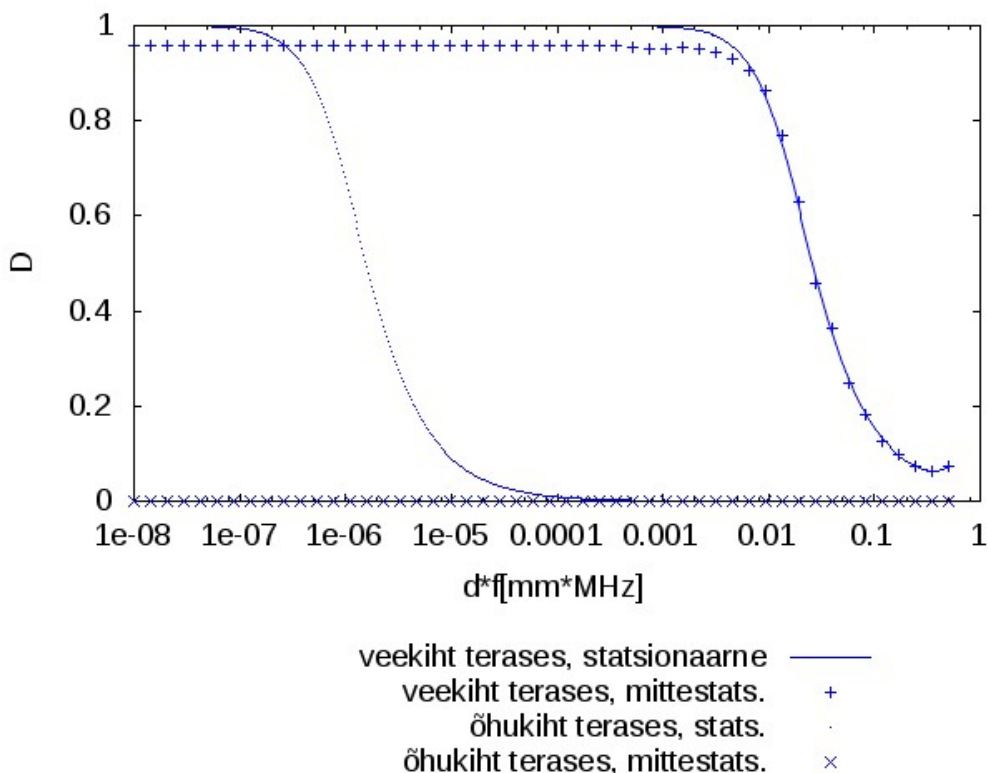


Joonis 9: Pleksiklaasi läbivuskoeffitsendi sõltuvus plaadi paksuse ja laine sageduse korrutisest, kui summa (4.2) on 2 liikmega

4.2 Defekt tahkes materjalis

Eespool käsitletud ülesannet saab vaadelda ka teistpidi e. juhul kui ained on vahetuses: väiksema impedantsiga aine on keskel ja seda ümbritseb suure impedantsiga teras $\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \ll 1$. Väikse impedantsiga aineteks võtame vee ja õhu ($\rho = 1.22 \text{ kg/m}^3, c = 330 \text{ m/s}$). Selline ülesande püstitus simuleerib laiusega d (vt. joon. 2) defekti olemasolu tahkes kehas. Vaatleme keskkonda väga väikeste paksuste puhul, kuna suuremate puhul tekivad vaid teravad läbivuskoeffitsendi tipud, mis kehtivad väga väikestel sagedus- või defekti paksusvahemikel ning need ei paku praktilisest seisukohast huvi [4, lk 20]. Uurime mittestatsionaarse juhu tulemuste koondumist statsionaarse tulemuseni erinevate summa liikmete hulga k korral (joon. 10, 11 ja 12).

Näeme, et veega täidetud defekti puhul terases (joon. 10) hakkab mittestatsionaarse olukorra läbivuskoeffitsent koonduma statsionaarsega samale väärtusele kui summas on 25-30 liiget. Sellest oluliselt lühemate häirituste puhul on läbivuskoeffitsendi maksimum palju madalam (10 liikme puhul napilt üle 0.7). Mittestatsionaarne ja statsionaarne olukord langevad terases paikneva veedefekti korral praktiliselt kokku juhul kui võtta summasse (4.2) 35 liiget.



Joonis 10: Läbivus terases olevas õhu- ja veega täidetud defektides. Mittestatsionaarne lahend on 25 liikmega

Näitame kui palju kulub aega vastava hulga liikmete kehtima hakkamiseks summas (4.2). On teada, et praktikas kasutatakse materjalide mittepurustaval testimisel sagedusi enamasti suurusjärgus 1 MHz, seega leiame vastavad ajad juhul kui õhuga täidetud defekti paksus on 10^{-8} m ja veega

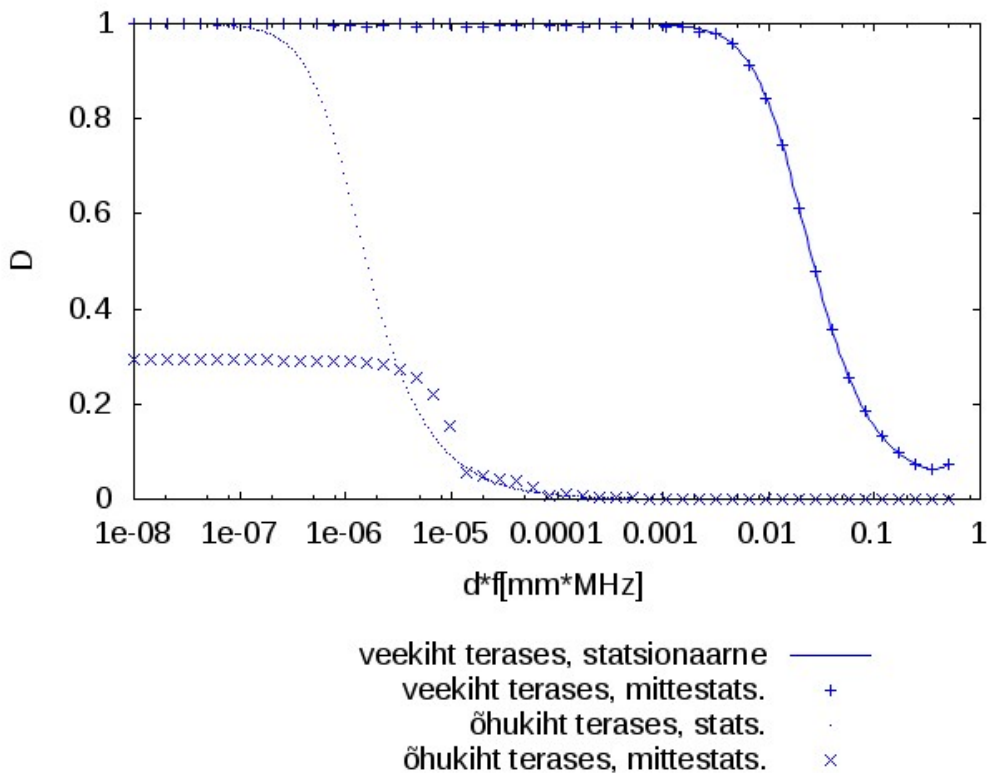
täidetud defektil $10^{-4}m$.

25 liikmelise summa (4.2) kõigi liikmete kehtima hakkamiseks kulub neil tingimustel veega täidetud defektis $t = \frac{2kd}{c_1} = \frac{50 \cdot 10^{-4}}{1484} = 3.37 \cdot 10^{-6} s$.

Õhuga täidetud defektil terases on läbivus seevastu 25 summa liikmega veel null (joon. 10). Tuleb välja, et kuna õhu ja terase akustilised impedantsid (vastavalt z_1 ja z) on niivõrd erinevad, on läbivus terasest õhku $D = \frac{2z_1}{z_1 + z}$ tühiselt väike ning kuigi pingeamplituudi läbivus õhust terasesse on peaaegu $R = \frac{2z}{z_1 + z} \approx 2$ ehk läbivuskoeffitsendi maksimaalne võimalik väärtus, jõuab esimese liitepinna väikese läbivuse tõttu teisele liitepinnale liiga väike pingelaine, et seda märgata oleks.

Praktikas arvestatakse tihti metalli ja õhu liitepinna vabaks pinnaks, kus pingelaine läbivust ei ole ja peegelduvus on sarnane metall/vaakum liitepinnale.

Tõstes summa (4.2) liikmete arvu näiteks 10 000 liikmeni, on näha, et tulemus hakkab liikuma statsionaarse kuju tulemuse poole (joon. 11).

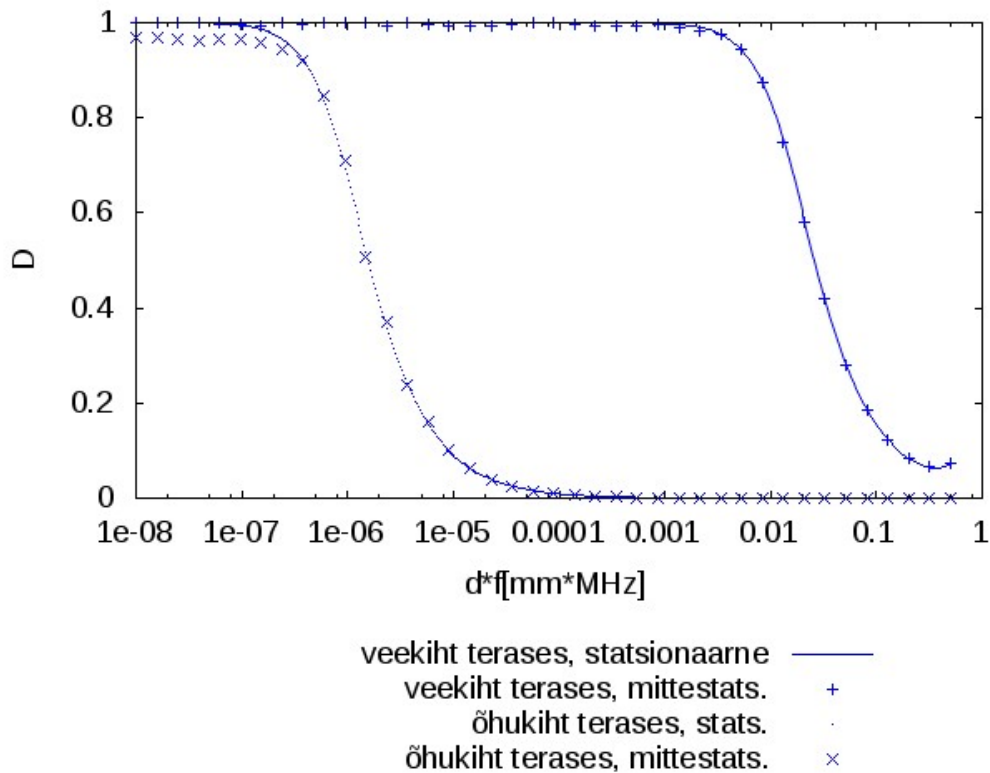


Joonis 11: Läbivus juhul kui mittestatsionaarse lahendi summa on avaldatud 10 000 liikmega

Summa kõigi liikmete kehtima hakkamise ajad on vastavalt veega täidetud defektil $t = \frac{20000 \cdot 10^{-4}}{1484} =$

$$1.35 \cdot 10^{-3} \text{ s ja õhuga vastavalt } t = \frac{20000 \cdot 10^{-8}}{330} = 6.06 \cdot 10^{-7} \text{ s.}$$

Veedefektiga saadud tulemusega võrreldava läbivuskoeffitsendi saamine õhu korral madalatel sagedustel või väikestel defektidel nõuab vähemalt 100 000 liikme arvestamist summas (4.2) (joon. 12).



Joonis 12: Läbivus juhul kui mittestatsionaarse lahendi summa on avaldatud 100 000 liikmega

100 000 liikmega summa kõigi liikmete kehtima hakkamise ajad on õhuga täidetud defektil $t = \frac{200000 \cdot 10^{-8}}{330} = 6.06 \cdot 10^{-6} \text{ s}$. Võib järeldada, et hoolimata sellest, et näites toodud õhuga täidetud defektis kulub mittestatsionaarse tulemuse lähendamisel statsionaarsele 100 000 liiget, võrreldes vastava veega täidetud defekti 10 000 liikmega, võtab see siiski vähem aega kui vee puhul. Seega peaks erinevate materjalide ja parameetrite korral lähtuma siiski konkreetsest ülesandest, otsustamaks, kas statsionaarse olukorra valemeid (3.4) ja (3.5) saaks kasutada mittestatsionaarse olukorra valemite asemel (4.1) ja (4.2).

KOKKUVÕTE

Antud töö käsitles ultraheli pikilaine levikut isotroopses, lineaarselt elastses, kadudeta keskkonnas. Leidsime ühemõõtmelise lainevõrrandi lahendi. Sai näidatud, kuidas ja millistel eeldustel tuletuvad lõpliku paksusega materjalist vahekihis levivate pingelainete peegeldumis- ja läbivuskoeffitsendid statsionaarse häirituse korral. Seejärel sai koostatud võrrandid summadest, mis iseloomustavad sama ülesande lahendamist mittestatsionaarsel juhul ning võrreldud statsionaarse ja mittestatsionaarse juhu peegelduskoeffitsentide tulemusi. Selgus, et lühikeste häirituste korral kui summa elemente on piisavalt vähe, saadakse erinevad tulemused, mida võib täpsuse huvides teatud juhtudel praktilistes arvutustes arvesse võtta.

Kuna käesoleva bakalaureusetöö suureks osaks oli lainelevi protsesside numbriline modelleerimine arvutis, sai vaadeldavateks materjalidekihtideks võetud praktikas enam tähtsust omada võivad ained: terase kiht vees, pleksiklaasi kiht vees, veekiht terases ja õhukiht terases. Saadud tulemuste võimalik praktiline tähtsus sõltus suuresti vaadeldud materjalidest. Kui vaadelda mittestatsionaarse summa liikmete hulka siis suure impedantside vahega kihtide puhul (nt. õhukiht terases) osutusid mittestatsionaarse juhu tulemused oluliselt erinevaks statsionaarse juhu tulemustest samas kui ühtlasemate impedantside puhul (nt. pleksiklaasiplaat vees) oli erinevus väiksem. Seega leidis kindlust oletus, et teatud juhtudel võib lühikeste häirituste puhul statsionaarsete valemite kasutamine anda valesid tulemusi ning eelnevalt peaks hindama materjalide parameetreid ja häirituse pikkust, mida on võimalik teha kasutades antud töö käigus koostatud (vt. Lisa 2) arvutiprogrammi algoritmi võimaliku erinevuse hindamiseks statsionaarse ja mittestatsionaarse juhu vahel.

Kuigi ultraheli rakenduste valdkond on väga põhjalikult ja pikaajaliselt läbi uuritud, võib siiski leida veel aspekte, mida võiks praktiliste tulemuste täpsuse nimel uurida ja modelleerida. See puudutab eelkõige neid juhte, kus analüütiline lahendamine on olnud ebaotstarbekas. Uurimist on võimalik jätkata teemadel, mis käsitlevad mittestatsionaarse lainevälja modelleerimist ka üldisematel juhtudel, näiteks kalde all olevate liitepindade peegeldus- ja läbivuskoeffitsentide ning lainelevi režiimi muutuse jaoks (näiteks juhul, kui tegu ei ole ühemõõtmelise vaid tasapinnalise laineleviga), kus pikilaine või ristlaine muutub pärast peegeldumist või läbimist ja seega ka murdumist piki- ja ristlainete superpositsiooniks. See peaks aga olema juba uue uurimistöö objektiks.

SUMMARY

The objective of this thesis is to examine the reflection and transmission of non-decaying one-dimensional ultrasonic pressure waves from a layer of material of finite thickness placed in a surrounding space of different material, the effect which is used in science, technology and medicine for non-destructive testing of materials.

It is hypothesized that in cases where the sound field is generated by sufficiently short, transient pulse of harmonic oscillations, the values for reflection and transmission coefficients do not match the coefficients which result from long oscillations where steady-state sound field has developed.

In order to examine the problem in-depth, it is firstly shown how and under which conditions the solution to acoustical wave equation can be obtained. This study uses Laplace transform to solve the partial differential equation for a given boundary condition of harmonic oscillation.

The second section shows how the reflection and transmission coefficient formulae of pressure waves are found in the case of one interface between two materials. These coefficients are also applicable for transient waves as they are not time-dependent, therefore these equations are used later in this study.

Next problem the thesis studies is the deduction of formulae for reflection and transmission coefficients of compressional one-dimensional waves from a plate surrounded by material with different properties. It is shown how widely used formulae in [9, p. 88] and [4, p. 19] can be found. Using these results, graphs are plotted to show reflection and transmission from a plate of steel or plexiglass in surrounding water. We find that the graph for transmittance coincides with the graph in [4, p. 19].

In the fourth section, a sum of reflections and transmissions are considered in order to construct a sum which shows the reflectivity or transmittance of the plate studied in previous section in the case of transient wave field. A computer program is created and used in order to calculate the solution of these sums and plot them to compare the reflectivity and transmittance for steady-state wave field. Using such analysis, we can show how many members of a sum for various material pairs are needed in order to approximate the result of the transient wave reflection and transmission to steady-state results. It is shown that materials of more uniform acoustic impedance need less members of a sum of transient case in order to coincide with the steady-state graph, than material pairs which have largely different acoustic impedance. Graphs are shown for following material pairs: steel in water, plexiglass in water, water in steel and air in steel. Plexiglass in water needs approximately 3 members of the sum describing reflectivity and transmittance of transient case in order for it to coincide with the result from the steady-state case. On the other hand, air defect in steel needs 100 000 to begin to do the same.

The hypothesis raised in the beginning about reflectivity and transmittance of transient wave fields not coinciding with reflectivity and transmittance of steady state wave fields is shown and confirmed, but it can not be generalized for all materials and dimensions, therefore it would be necessary for each specific case to calculate whether the steady-state formulae are sufficient or does the duration of pulse need to be taken into account.

Viited

- [1] Bedford, A., Drumheller, D., S., Introduction to Elastic Wave Propagation. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1994
- [2] Bergmann, L. Der Ultraschall und seine Anwendung in Wissenschaft und Technik. Dritte Auflage. Berlin: VDI-Verlag G.m.b.H., 1942
- [3] Braunbrück, A. Mittelineaarne lainelevi ja interaktsioon homogeeses elastses keskkonnas: bakalaureusetöö. Tallinn: Tallinna Tehnikaülikool, 1999
- [4] Krautkrämer, J., Krautkrämer, H. Ultrasonic Testing of Materials, 4th Fully Revised Edition. Berlin: Springer-Verlag, 1990
- [5] Kuttruff, H., Acoustics. An introduction. London: S. Hirzel Verlag, 2007
- [6] Lempriere, B., M. Ultrasound and Elastic Waves, Frequently Asked Questions. Amsterdam: Academic Press, 2002
- [7] Metsaveer, J., Raukas, U., Varda sisejõud ja pinged. Tallinn: TTÜ Kirjastus, 2001
- [8] Pain, H., J., The Physics of Vibrations and Waves. 5th Edition. Chichester: John Wiley & Sons Ltd, 1999
- [9] Rayleigh, J., W., S. The Theory of Sound: Volume II. New York: Dover Publications, Inc, 1945

Lisa 1 STATIONAARSE JUHU KOEFITSENTIDE TULETUSKÄIK

Pegelduskoefitsendi tuletuskäik

$$\begin{aligned}\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} (A' - A'') &= B' - B'', \\ B' &= A' + A'' - B'', \\ \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} A' - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} A'' &= -2B'' + A' + A'', \\ \frac{A'}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - 1 \right) - \frac{A''}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + 1 \right) &= -B'', \\ B'' &= -B' + A'' + A', \\ \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} A' - \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} A'' &= 2B' - A'' - A', \\ \frac{A'}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + 1 \right) - \frac{A''}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - 1 \right) &= B',\end{aligned}$$

Asendades need valemitesse, mis kehtivad kohal $x = d$, saab tulemuseks

$$\begin{aligned}e^{ik_1 d} \left(\frac{A'}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + 1 \right) - \frac{A''}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - 1 \right) \right) - e^{-ik_1 d} \left(\frac{A'}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - 1 \right) - \frac{A''}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + 1 \right) \right) &= A^1 e^{ikd} \\ \rho c e^{ik_1 d} \left(\frac{A'}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + 1 \right) - \frac{A''}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - 1 \right) \right) + \rho c e^{-ik_1 d} \left(\frac{A'}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - 1 \right) - \frac{A''}{2} \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + 1 \right) \right) &= \\ \rho_1 c_1 A^1 e^{ikd} &\end{aligned}$$

Grupeerides eksponendid positiivsete ja negatiivsete astmete summade ning vahede kaupa:

$$\left(e^{ik_1 d} - e^{-ik_1 d} \right) \left(\frac{A'}{2} - \frac{A''}{2} \right) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \right) + \left(e^{ik_1 d} + e^{-ik_1 d} \right) \left(\frac{A'}{2} + \frac{A''}{2} \right) = A^1 e^{ikd}$$

$$\left(e^{ik_1 d} + e^{-ik_1 d} \right) \left(\frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) \left(\frac{A'}{2} - \frac{A''}{2} \right) + \left(e^{ik_1 d} - e^{-ik_1 d} \right) \left(\frac{A'}{2} + \frac{A''}{2} \right) = \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} A^1 e^{ikd}$$

$$i \sin(k_1 d) (A' - A'') \frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \cos(k_1 d) (A' + A'') = A^1 e^{ikd}, \quad (\text{Lisa 1.1})$$

$$i \sin(k_1 d) (A' + A'') \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} + \cos(k_1 d) (A' - A'') = A^1 e^{ikd}, \quad (\text{Lisa 1.2})$$

Lahutades võrrandist (Lisa 1.1) võrrandi (Lisa 1.2), saab:

$$i \sin(k_1 d) \left(A' \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) - A'' \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) \right) + \cos(k_1 d) ((A' - A'') + 2A'') = 0 \mid : A',$$

$$i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) - \frac{A''}{A'} \left(i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) - 2 \cos(k_1 d) \right) = 0,$$

Kompleksarvuline kuju

$$\frac{A''}{A'} = \frac{i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)}{i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) - 2 \cos(k_1 d)},$$

Selle kompleksarvu moodul annab otsitava peegelduskoeffitsendi (3.4):

$$R = \frac{\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)}{\sqrt{\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)^2 + 4 \cot^2(k_1 d)}}.$$

Läbivuskoeffitsendi tuletus Liites võrrandeid (Lisa 1.1) ja (Lisa 1.2)

$$i \sin(k_1 d) \left(A' \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) - A'' \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) \right) + 2A' \cos(k_1 d) = 2A^1 e^{ikd} \mid : A',$$

$$i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) + 2 \cos(k_1 d) - i \frac{A''}{A'} \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) = 2 \frac{A^1}{A'} e^{ikd},$$

$$i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) + 2 \cos(k_1 d) -$$

$$- \frac{i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) \cdot i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)}{i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) - 2 \cos(k_1 d)} = 2 \frac{A^1}{A'} e^{ikd},$$

Viies võrrandi vasaku poole ühisele nimetajale, saab lihtsustada:

$$\frac{\left(\left(i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) \right)^2 + (2 \cos(k_1 d))^2 \right) + \sin^2(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)^2}{i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) - 2 \cos(k_1 d)} = 2 \frac{A^1}{A'} e^{ikd},$$

$$- \sin^2(k_1 d) \left(\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \right)^2 + 2 + \left(\frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)^2 \right) + 4 \cos^2(k_1 d) + \sin^2(k_1 d) \left(\left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} \right)^2 - 2 + \left(\frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right)^2 \right)$$

$$\frac{\hspace{10em}}{i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) - 2 \cos(k_1 d)} =$$

$$= 2 \frac{A^1}{A'} e^{ikd},$$

$$\frac{-4 \cos^2(k_1 d) - 4 \sin^2(k_1 d)}{i \sin(k_1 d) \left(\frac{\rho_1 c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1 c_1} \right) - 2 \cos(k_1 d)} = 2 \frac{A^1}{A'} e^{ikd},$$

Seega on läbivuskoeffitsent kompleksarvulisel kujul

$$\frac{A^1}{A'} = \frac{2e^{-ikd}}{-i\frac{1}{2}\sin(k_1d)\left(\frac{\rho_1c_1}{\rho c} - \frac{\rho c}{\rho_1c_1}\right) + \cos(k_1d)},$$

mille moodul annabki võrrandi (3.5)

$$D = \frac{1}{\sqrt{\cos^2(k_1d) + \frac{1}{4}\sin^2(k_1d)\left(\frac{\rho_1c_1}{\rho c} + \frac{\rho c}{\rho_1c_1}\right)^2}},$$

Lisa 2 ARVUTUSPROGRAMMI ALGORITM

Jooniste graafikupunktide arvutamiseks koostatud programmi algoritm:

- Sisendandmeteks on materjalide tihedused ja laine faasikiirused, plaadi $0 < x < d$ (joon. 2) paksus, vaadeldav sagedusvahemik, arv *liikmeteArv* = $k + 1$ mis näitab summa liikmete arvu ning jaotiste arvud (ajajaotised summa maksimumi leidmiseks, punktide hulgad statsionaarse ja mittestatsionaarse joone graafikutel).
- funktsioon *statsionaarneLäbivus* arvutab läbivuskoeffitsendi statsionaarsel juhul, vastavalt valemile (3.5). Sisendandmeteks on kahe aine tihedused ja laine faasikiirused, sagedus ning plaadi $0 < x < d$ paksus.
- funktsioon *mitteStatsLäbivus* arvutab läbivuskoeffitsendi mittestatsionaarsel juhul, vastavalt valemile (4.2), kus sisendandmeteks on ainete tihedused ja laine faasikiirused, sagedus f , uuritava plaadi paksus d , summa liikmete arv ning ajajaotiste arv.

1. $R = \frac{\rho_1 c_1 - \rho c}{\rho_1 c_1 + \rho c}$

2. $D = \frac{2\rho_1 c_1}{\rho_1 c_1 + \rho c}$

3. $D_{-1} = \frac{2\rho c}{\rho_1 c_1 + \rho c}$

4. Programm leiab vajaliku aja, mis on tarvis, et etteantud hulk summa liikmeid kehtiks:
 $minimaalneAeg = \frac{(2 \cdot liikmeteArv - 1)d}{c_1}$

5. Üks periood, mille jooksul peab leidma maksimumi on $aegDelta = \frac{1}{f}$

6. Uuritav ajavahemik vektorina *aeg*, kus on *ajajaotiste arv* liikmeid ja mis ulatub alates *minimaalneAeg* kuni *minimaalneAeg* + *aegDelta*.

7. Initaliseeritakse tulemuste vektor, liikmete hulgaga *ajajaotiste arv*.

8. *for l=1* kuni *ajajaotiste arv*

t=vektori *aeg* *l*-s liige

summa = $R * \cos 2\pi ft$

9. *while* $m \leq arv$

10. *if* $m > 1$

$$summa = summa - R^{2m-3} D D_1 \cos \left(2\pi ft - \frac{2\pi f (2m-2)d}{c_1} \right)$$

endif

m=*m*+1

endwhile

Tulemus sisestatakse vektori *tulemused* *l*-ndale kohale

endfor

return= vektori *tulemused* maksimaalne väärtus

Funktsioon lõppeb, tagastades väärtuse *return*

- Analoogiliselt kahe eelneva punktiga defineeritakse ka funktsioonid *statsionaarnePeegelduvus* ja *mitteStatsPeegelduvus*, kasutades vastavalt valemeid (3.4) ja (4.1).
- Uuritav sagedusvahemik jaotatakse etteantud hulgaks punktideks. Igas punktis arvutatakse väärtus kasutades funktsioone *statsionaarneLäbivus*, *statsionaarnePeegelduvus*, *mitteStatsionaarneLäbivus* või *mitteStatsionaarnePeegelduvus* ning lisatakse need graafikule.
- Programmi töö lõpp