

5. DETERMINEERITUD KAOS

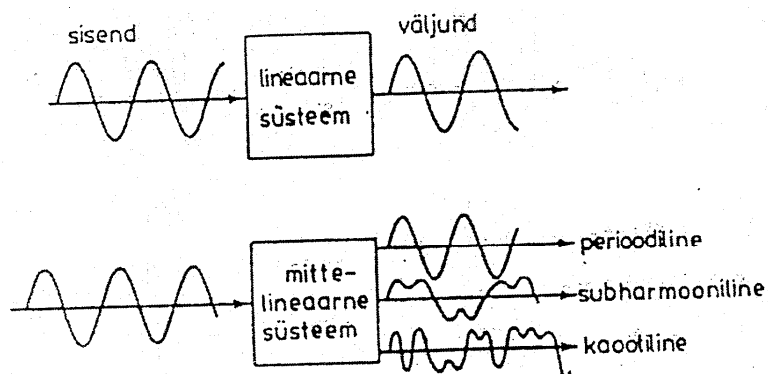
Lepik, Engelbrecht ptk 6

Definitsioon:

Protsesse, kus hoolimata determineeritud mudelist tekib ebareeglipärane liikumine, nimetatakse kaootilisteks

Mudel }
Tegelikkus } ?

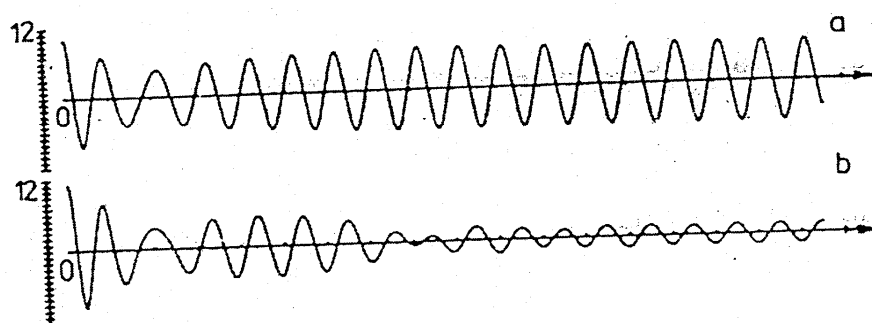
Kvantitatiivsed hinnangud võimalikud,
nendest hiljem (ptk 8)



Lineaarse ja mittelineaarse süsteemi väljundite erinevus.
Moon, 1987.

Duffingi võrrand

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 = f \cos \omega t$$



Mittelineaarse sunbuva sundvõnkumise graafik:

- (a) $x_{01} = A$, $\dot{x}_{01} = 0$;
- (b) $x_{02} = B$, $\dot{x}_{02} = 0$, $A < B$; väiksem algamplituud tekitab suurema amplituudiga võnkumise.

Thompson, Stewart, 1986.

ALGIDEED

Maxwell 1873

Hadamard 1898

Poincaré 1908

- kolme keha probleem
- "... võib juhtuda, et väikesed erinevused algolukorra kirjeldamisel põhjustavad suuri muutusi vaadeldavas nähtuses."

Weierstrassi funktsioonid

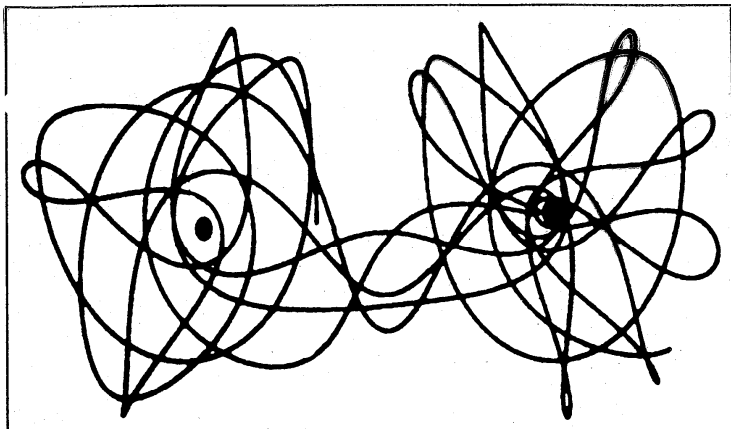


Illustration du mouvement d'un corps attiré par deux masses identiques. Les forces régies par des équations simples, donnent des mouvements d'une extrême complexité.



Une cause très petite, qui nous échappe, détermine un effet considérable que nous ne pouvons pas ne pas voir, et alors nous disons que cet effet est dû au hasard. Si nous connaissons exactement les lois de la nature et la situation de l'univers à l'instant initial, nous pourrions prédire exactement la situation de ce même univers à un instant ultérieur. Mais, lors même que les lois naturelles n'auraient plus de secret pour nous, nous ne pourrions connaître la situation initiale qu'approximativement. Si cela nous permet de prévoir la situation ultérieure avec la même approximation, c'est tout ce qu'il nous faut, nous disons que le phénomène a été prévu, qu'il est régi par des lois ; mais il n'en est pas toujours ainsi, il peut arriver que de petites différences dans les conditions initiales en engendrent de très grandes dans les phénomènes finaux ; une petite erreur sur les premières produirait une erreur énorme sur les derniers. La prédiction devient impossible et nous avons le phénomène fortuit.

C'est la «sensibilité aux conditions initiales» qui engendre des effets «chaotiques» dans des systèmes déterministes régis par des équations différentielles. Poincaré l'avait découvert à ses dépens, c'est le cas de le dire, si l'on se souvient des coûts de réimpression de son mémoire lauréat, qu'il remboursa à Mittag-Leffler.

Les résultats présentés dans ce mémoire seront approfondis et complétés dans les trois volumes des *Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste* (1892-1899) et, par la suite, dans les *Leçons de Mécanique céleste* parues en quatre volumes entre 1905 et 1911.

Periodi kahendumine

$$x_{n+1} = 4 \lambda x_n (1 - x_n)$$

44

2 Das deterministische Chaos

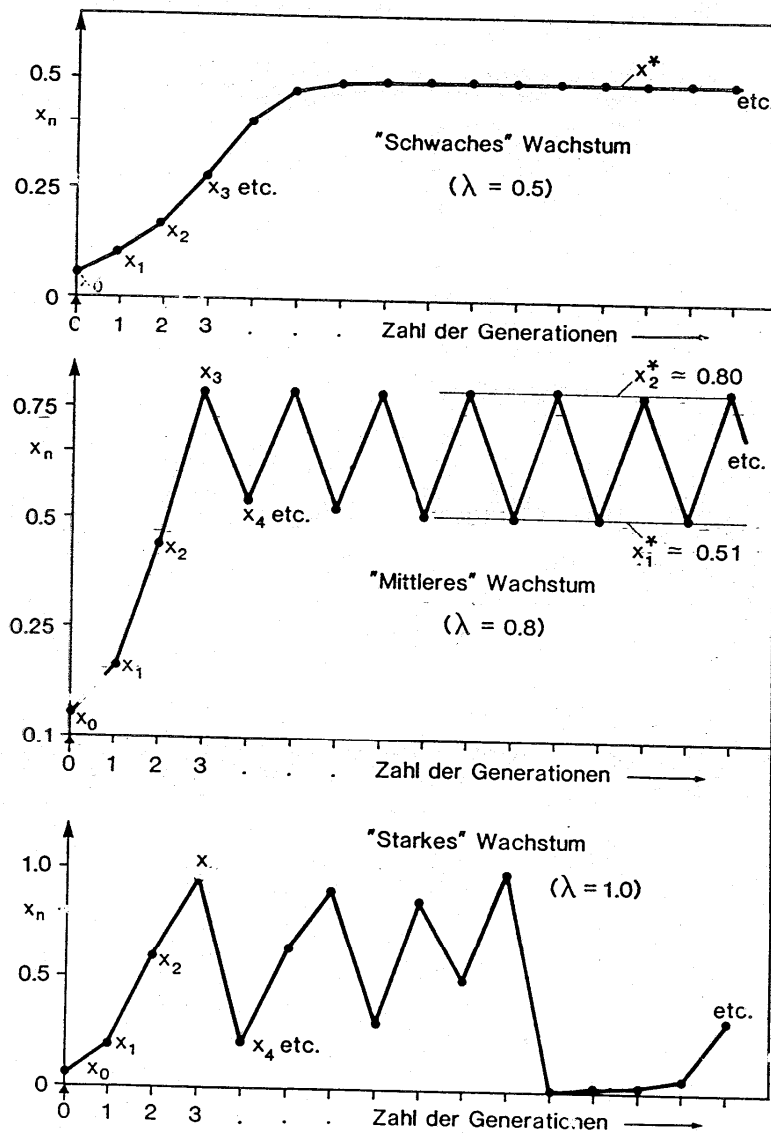


Abbildung 2.1: Das Iterationsschema der Verhulst-Dynamik bei verschiedenen Werten des Wachstumsparameters λ : Schwaches Wachstum ($\lambda = 0.5$) mit einem Attraktor, mittleres Wachstum ($\lambda = 0.8$) mit 2 Attraktoren und starkes Wachstum ($\lambda = 1$) mit chaotischem Verhalten der Populationen

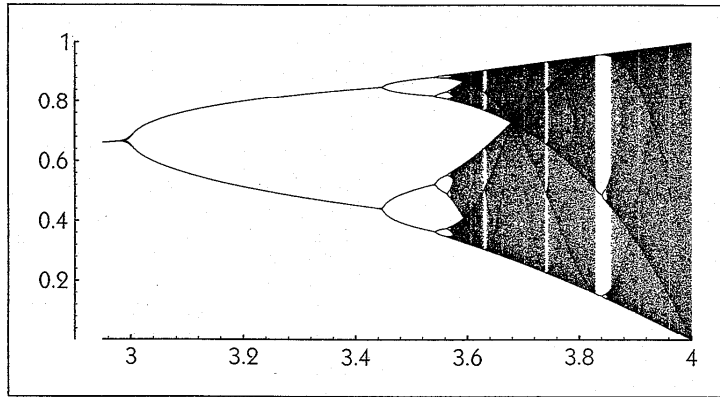


Figure 1.31 A bifurcation diagram of Eq. 1.6. The asymptotic values of x_t are plotted as a function of R using the method described in the text.

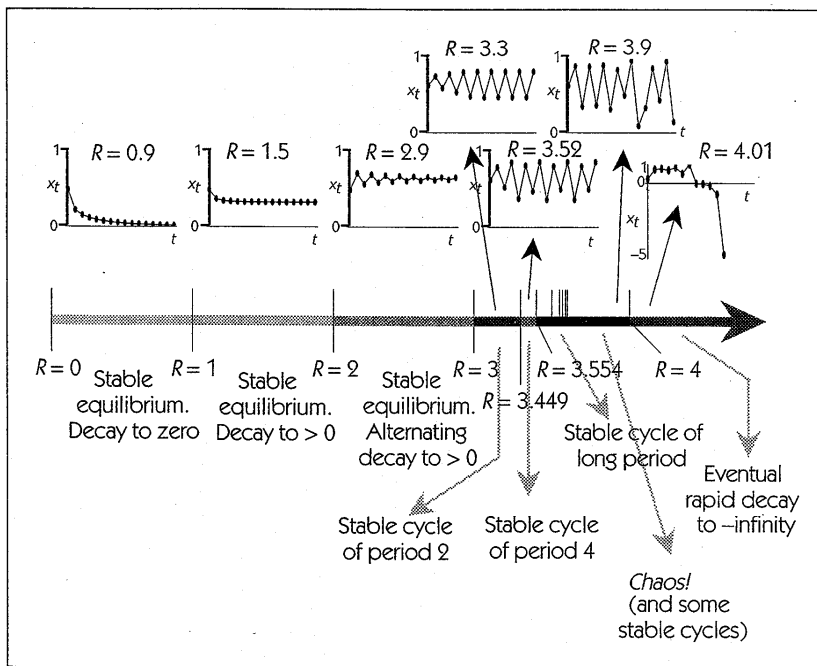


Figure 1.32 The various types of qualitative dynamics seen in $x_{t+1} = Rx_t(1 - x_t)$ for different values of the parameter R .

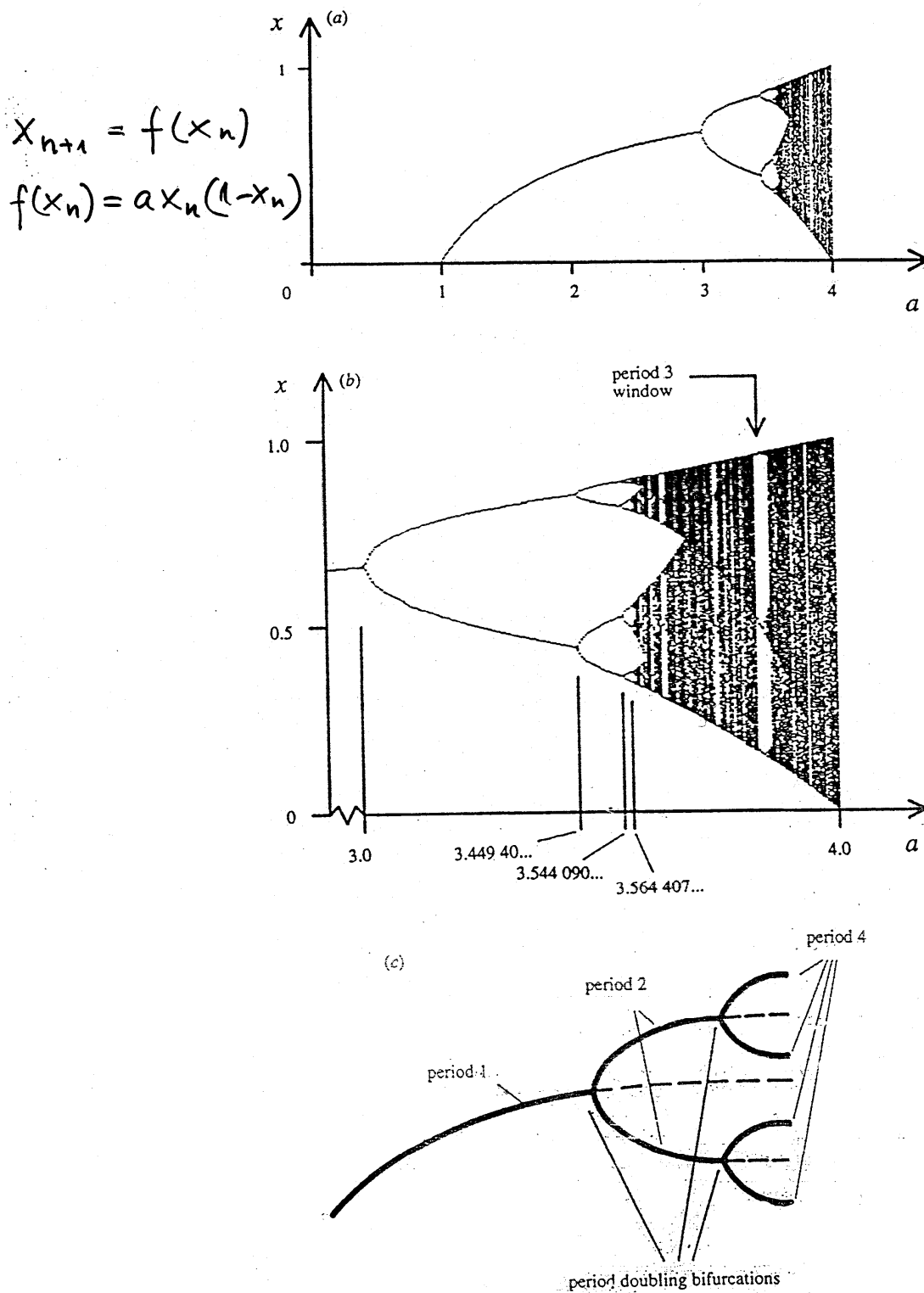
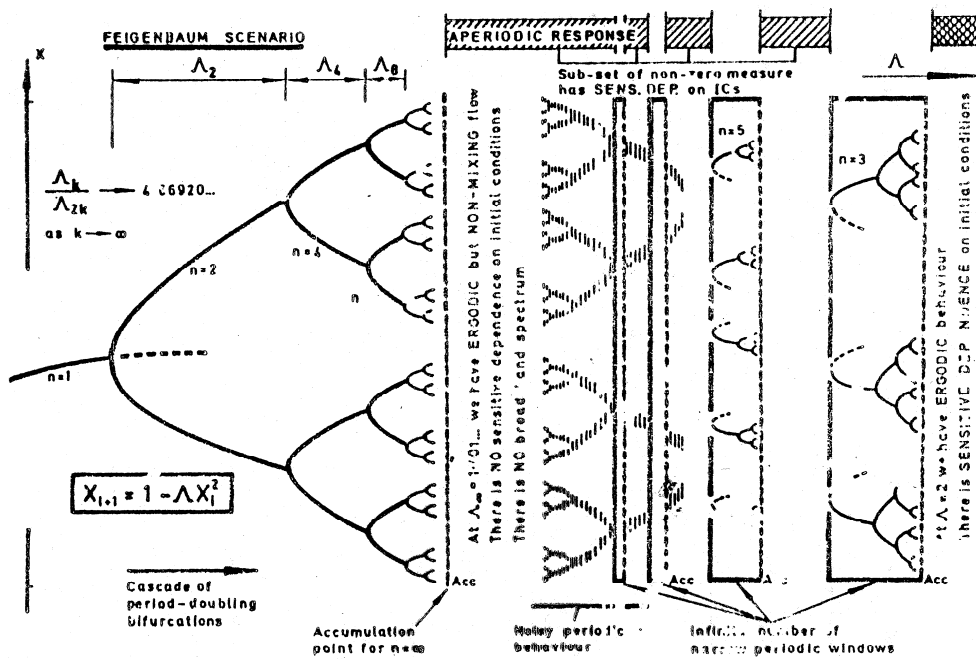
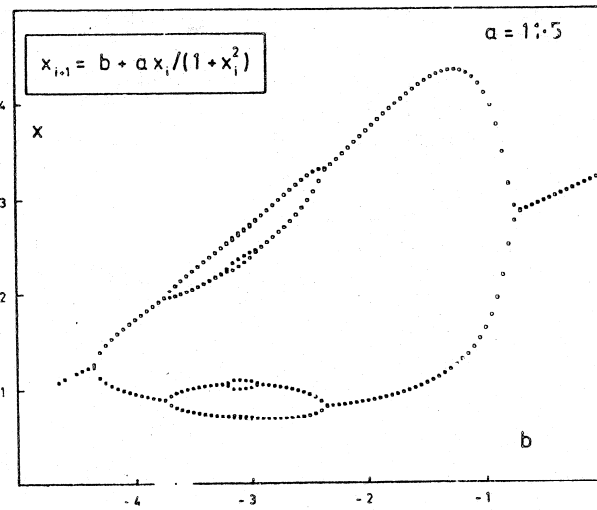
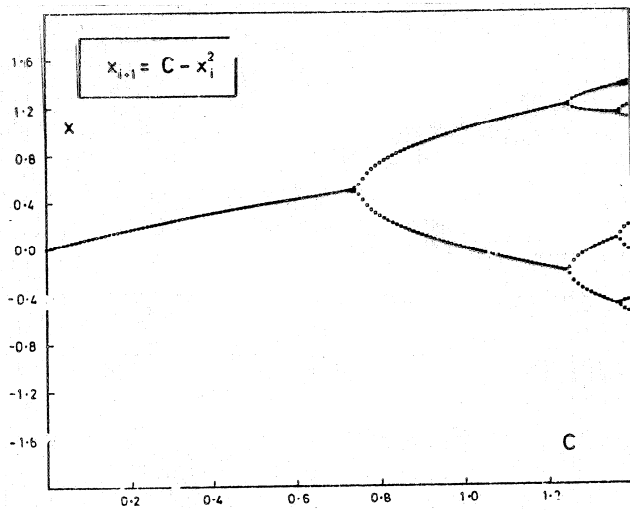
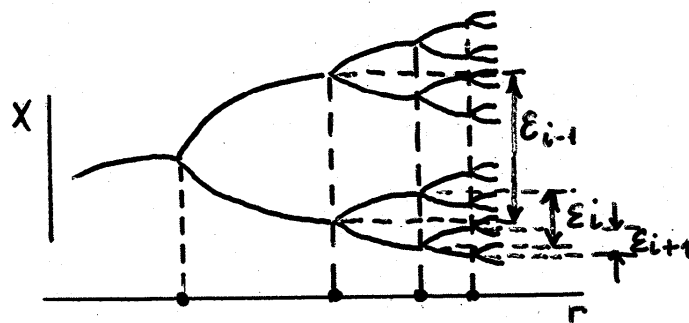
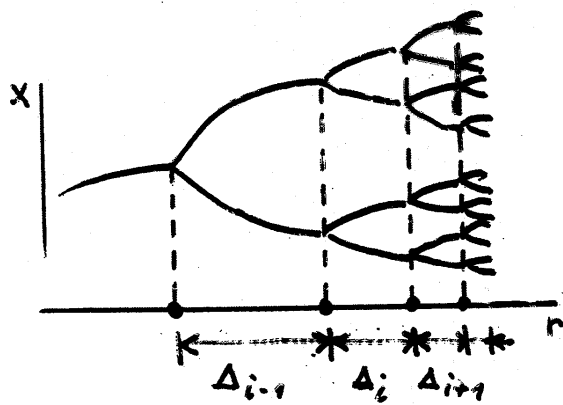


Figure 5.4. The bifurcation diagram for the logistic equation. (a) The bifurcation diagram for the logistic equation: post-transient solution against control parameter. (b) Zoom into the logistic diagram over the range $3.0 < a < 4.0$. (c) General form of the period doubling bifurcations.





$$\delta_i = \frac{\Delta_i}{\Delta_{i+1}} = \frac{r_i - r_{i+1}}{r_{i+1} - r_{i+2}}$$

$$\alpha_i = \frac{\epsilon_i}{\epsilon_{i+1}}$$

$$i \rightarrow \infty$$

$$\delta_i \rightarrow \delta = 4.6692016091\dots$$

$$\alpha_i \rightarrow \alpha = 2.5029078750\dots$$

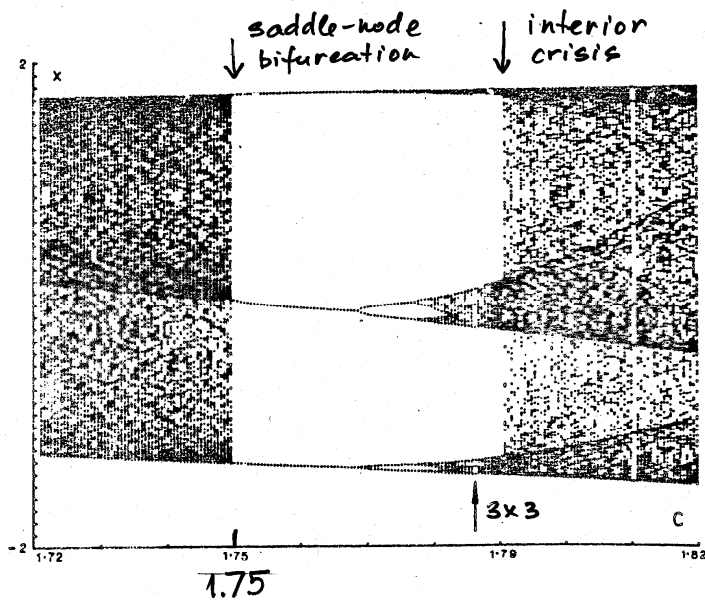
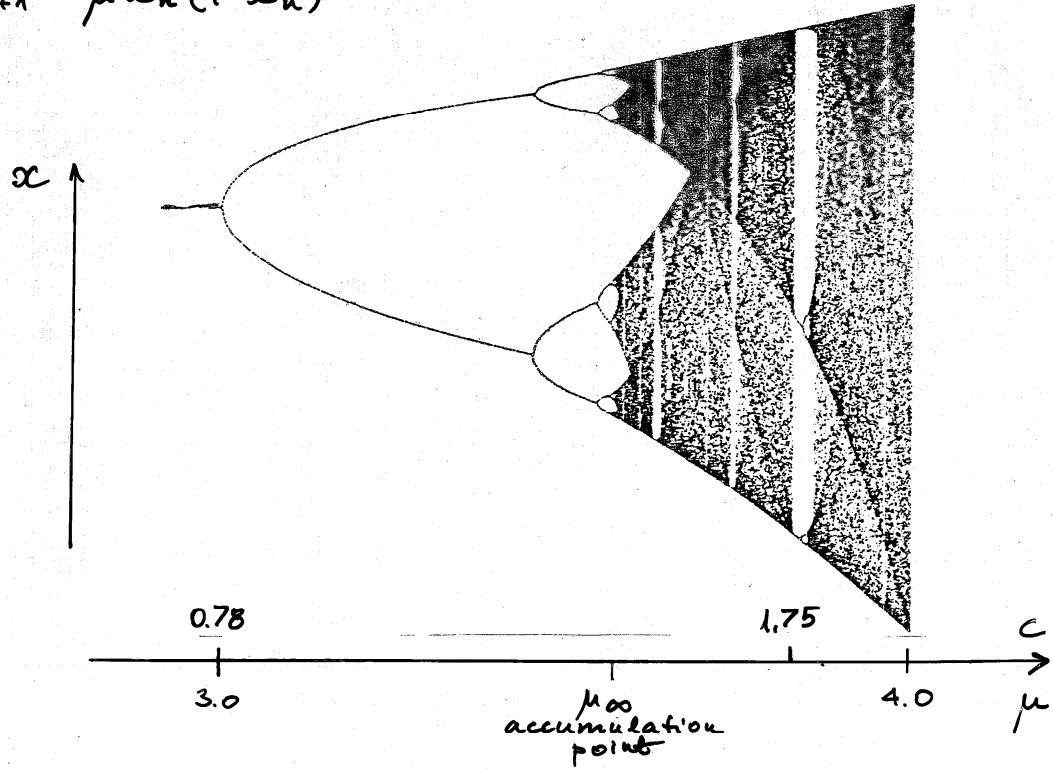
$$\infty \rightarrow \text{Roman } M \subset | \supset$$

1655 John Wallis - shorthand

$$x_{n+1} = C - x_n^2$$

$$\updownarrow$$

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$



Sarkovskii:

$$3 \rightarrow 5 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow \dots \rightarrow 2 \times 3 \rightarrow 2 \times 5 \rightarrow 2 \times 7 \rightarrow 2 \times 9 \rightarrow \dots$$

$$\rightarrow 2^n \times 3 \rightarrow 2^n \times 5 \rightarrow 2^n \times 7 \rightarrow \dots \rightarrow 2^n \rightarrow \dots \rightarrow 16 \rightarrow 8 \rightarrow 4 \rightarrow 2 \rightarrow 1$$

$m \neg n$ m asetseb eespool n 'i
Sarkovski järjestuses

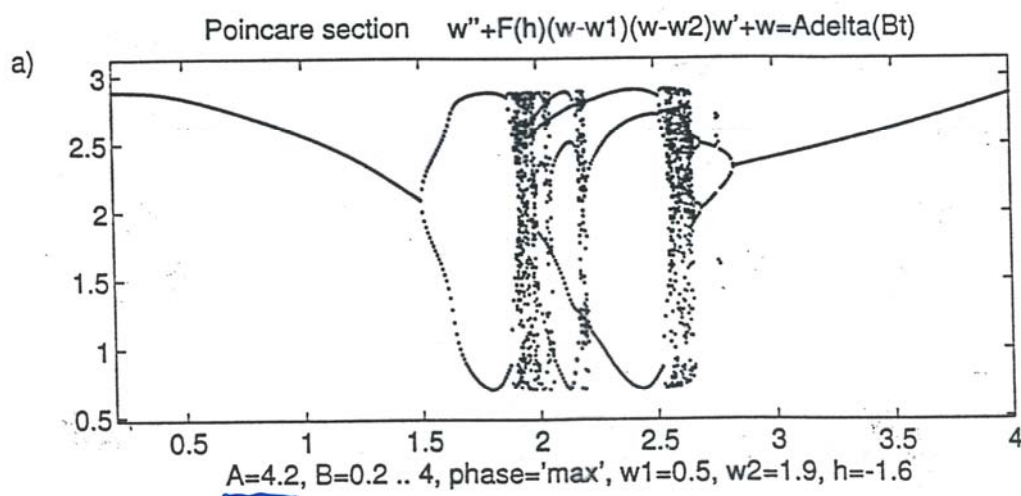
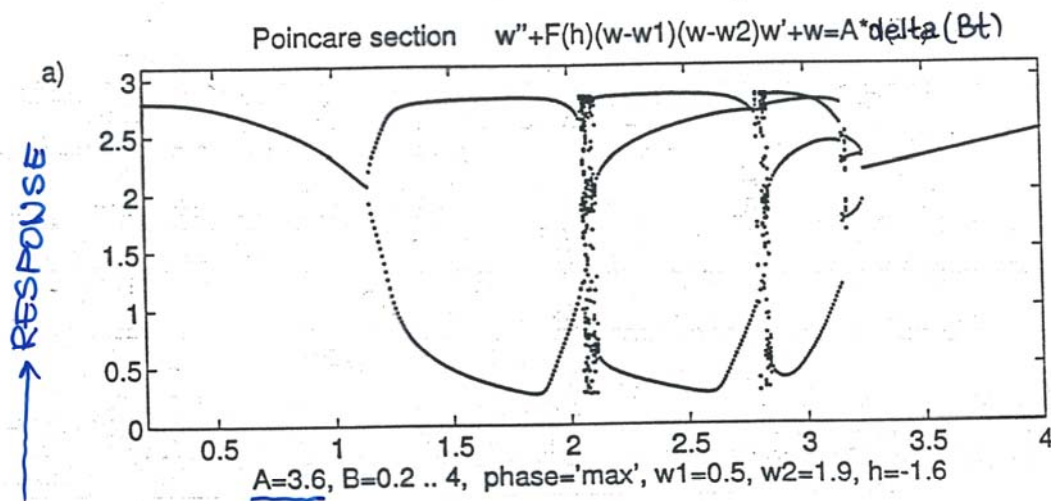
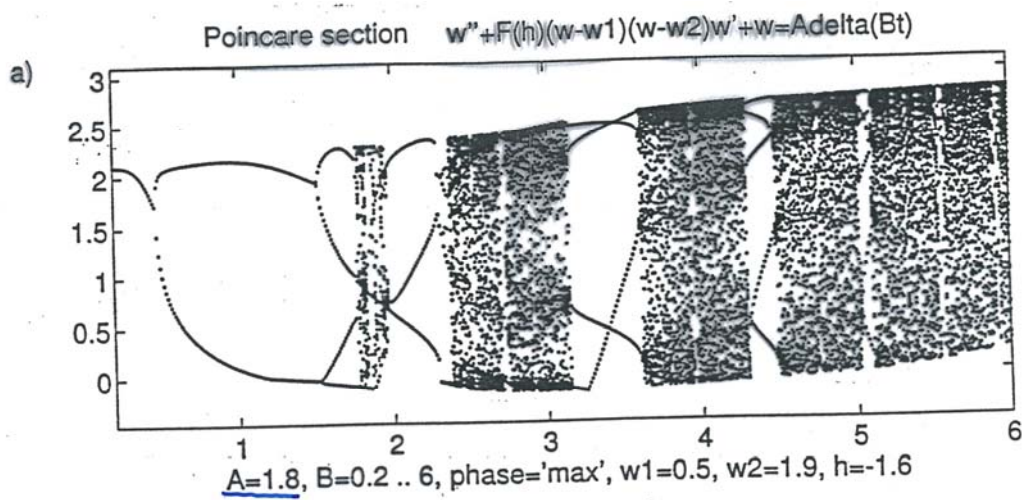
Sarkovski teoreem

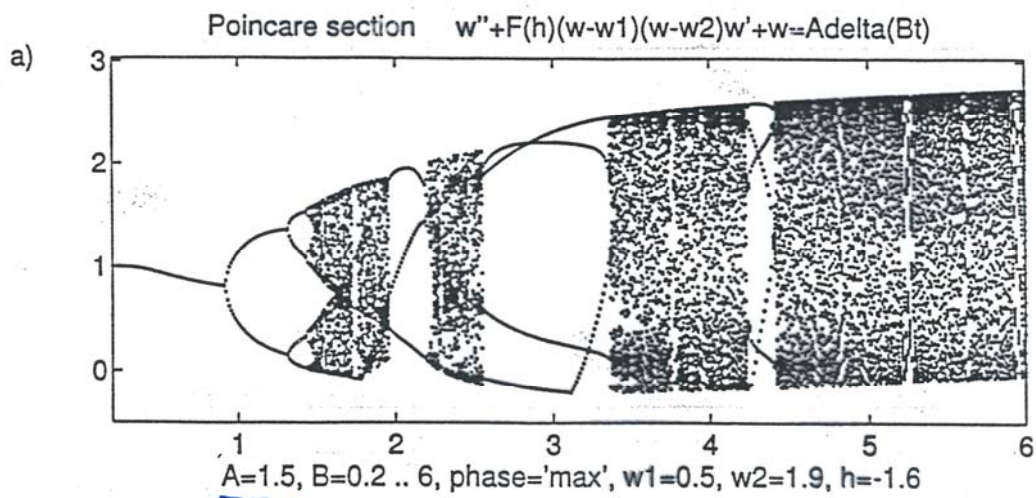
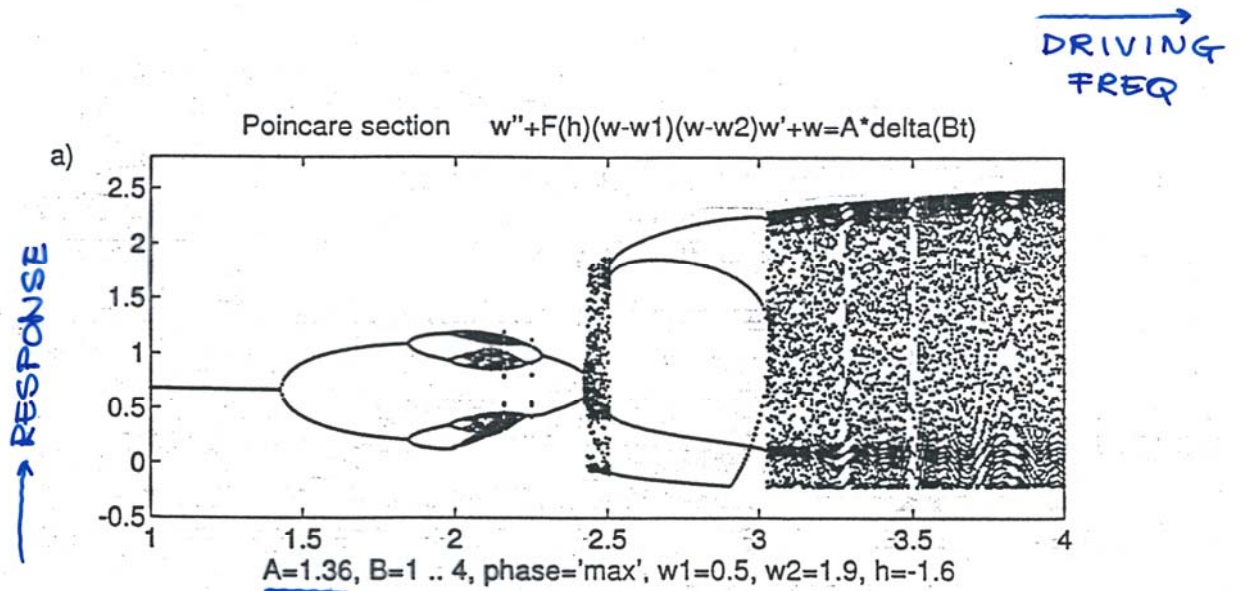
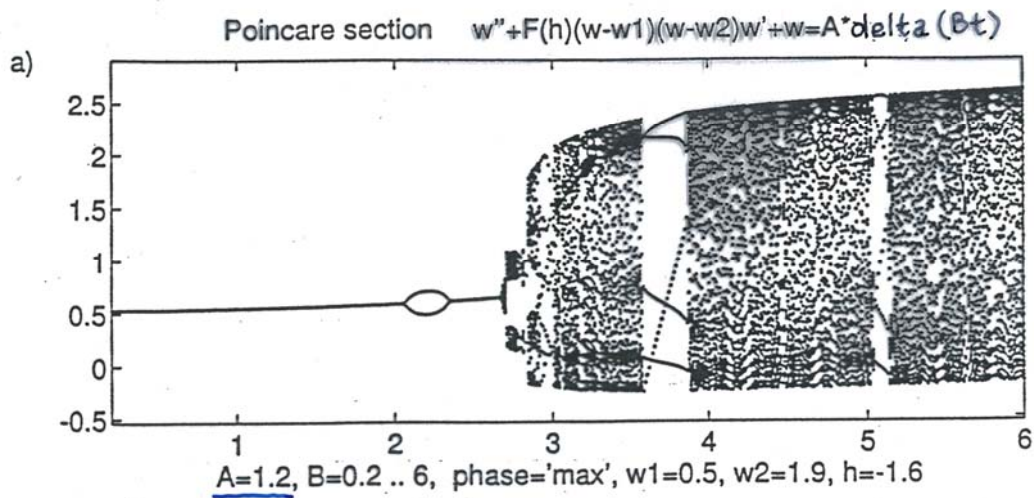
Olgu f pidev funktsioon vahemikus J nii et $J \geq f(J)$.
Kui f on püsipunkt perioodiga m , siis f on ka
püsipunkt perioodiga n nii et $m \neg n$

Sarkovski järjestus

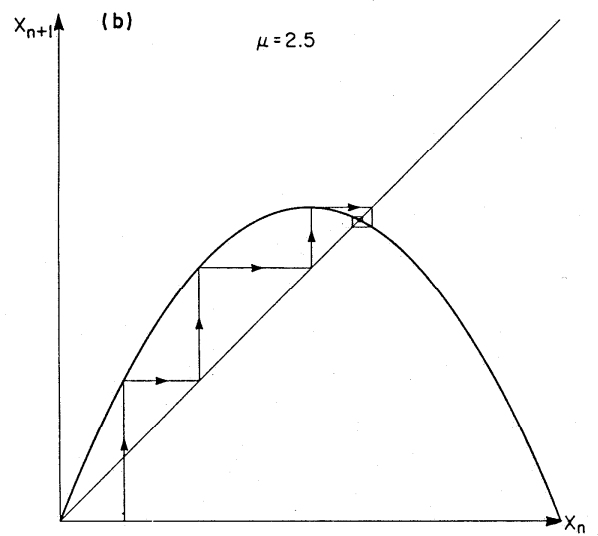
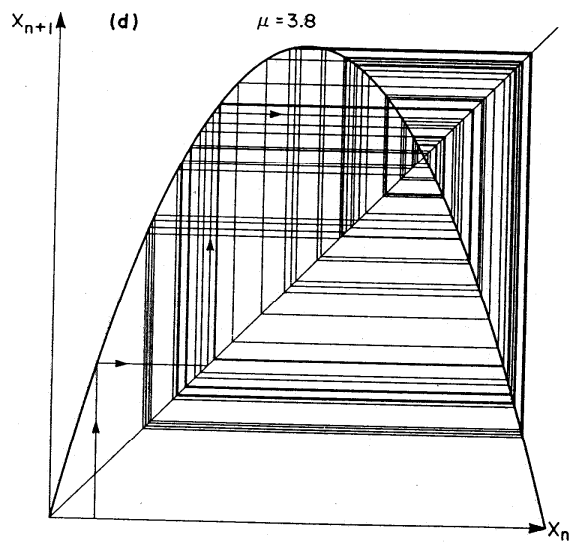
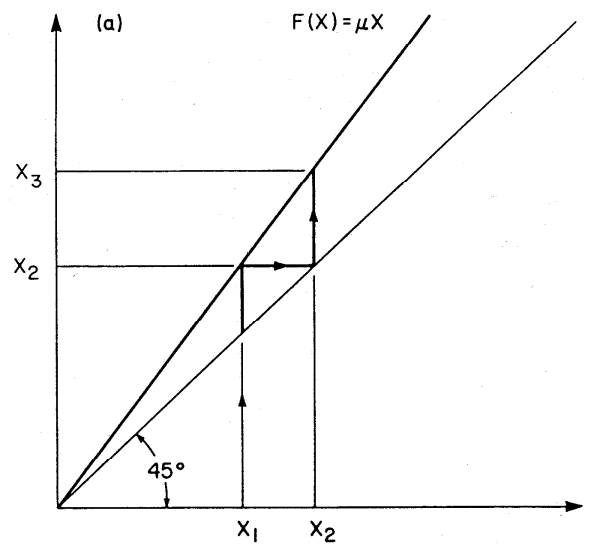
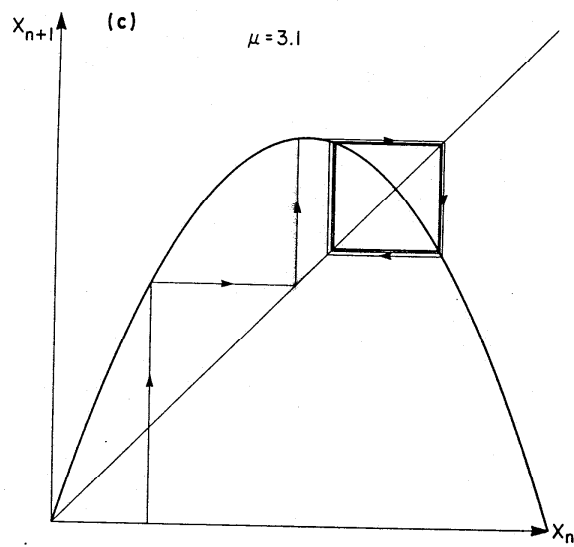
$3 \neg 5 \neg 7 \dots 2 \cdot 3 \neg 2 \cdot 5 \neg 2 \cdot 7 \neg \dots$
paaritud täisarvud $2 \cdot (\text{paaritud täisarvud})$

$\dots 2^2 \cdot 3 \neg 2^2 \cdot 5 \neg 2^2 \cdot 7 \neg \dots \neg 2^3 \neg 2^2 \neg 2 \neg 1$
 $2^2 \cdot (\text{paaritud täisarvud})$ 2 astmed





$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n)$$



Kaootiline atraktor

Dünaamiliste protsesside analüüsis on oluline koht püsipunktidel, üldistatult öeldes – teatud faasiruumi osadel. Süsteemi omadustest (struktuurist, parameetritest) tingitult jõuab lahend teatud aja möödudes möödapääsmatult faasiruumi teatud piirkonda. Varasemast (ptk. 2) on teada püsipunktid ja piirtsüklid, täpsem teooria nõuab ka siin üldistust. Selleks alustame atraktori mõistest.

Definitsioon: *Atraktoriks nimetame punktide hulka või alamhulka faasiruumis, kuhu suundub trajektoor pärast üleminekuperioodi möödumist.*

Eristatakse kolme atraktori põhitüüpi:

- 1) punktatraktor,
- 2) perioodiline atraktor,
- 3) kaootiline atraktor.

Punktatraktor kujutab endast püsipunkti. Mitme stabiilse püsipunkti korral on punktatraktoreid mitu.

Perioodiline atraktor on stabiilne piirtsükkel, s.o. suletud trajektoor faasiruumis, millele varem või hiljem taandub liikumine. Suletud trajektoor tähendab seda, et liikumine kordub perioodiliselt mööda antud

trajektoori, millest tuleneb ka atraktori nimi. Sarnaselt punktatraktorige süsteemiga võib samaaegselt esineda mitu perioodilist atraktorit ehk piirtsüklit (Thompson, Stewart, 1986).

Nende kahe eespool mainitud atraktori puhul suunduvad trajektoorid teatud aja jooksul kindlasse faasiruumi alamruumi, mis on igati determineeritud. Ühel juhul on selleks punkt, teisel juhul kinnine orbiit. Mittelineaarsete süsteemide juures tuleb eelmiste kõrval kindlasti määratleda ka kolmas atraktori tüüp – kaootiline. Nüüd juba klassikaliseks kuulutatud kaootilise atraktori näide pärineb E. Lorenzilt.

E. Lorenz uuris õhu liikumist atmosfääris ning teda huvitas eelkõige termiliselt tekitatud konvektsioon atmosfääri madalamates kihtides. Alustades Navier'-Stokesi võrranditest, jõudis ta lõpuks lihtsa kolme muutuja süsteemini. Selles süsteemis tähistas x voolufunktsiooni amplituudi ja y, z tähistasid temperatuuri jaotust.

Lorenzi võrrandisüsteem

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \sigma y - \sigma x, \\ \dot{y} &= rx - y - xz, \\ \dot{z} &= xy - bz,\end{aligned}\tag{6.3.1}$$

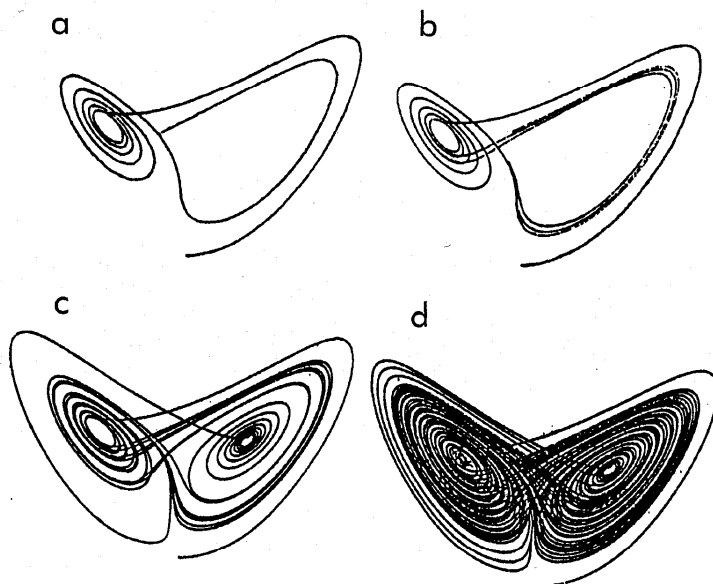
kus σ, r, b on konstandid, osutus üllatavalt rikkaks oma sisu poolest. Meid huvitab eelkõige, milline faasiportree vastab süsteemile (6.3.1) ja millised atraktorid selles leiduvad.

Lorenzi võrrandite numbrilise lahendamise tulemus konstantide $r = 28, \sigma = 10, b = 8/3$ puhul on esitatud joonisel 6.5. Tulemus ei lähe kokku ühegi varasema mõistega. Trajektoolid moodustavad silmuseid kord ühes faasiruumi osas, kord teises, nende ülehüppamine ühest kohast teise on ebareeglipärane. Saadud liblikakujulise faasitrajektooride parve ristas Lorenz *veidraks atraktoriks* (*strange attractor*). Samal ajal on täidetud atraktori definitsiooni tingimus – trajektoolid hõlmavad ühe osa faasiruumist, kuid käitumine selles alamruumis pole ennustatav. Praegu nimetatakse selliseid atraktoreid kaootilisteks.

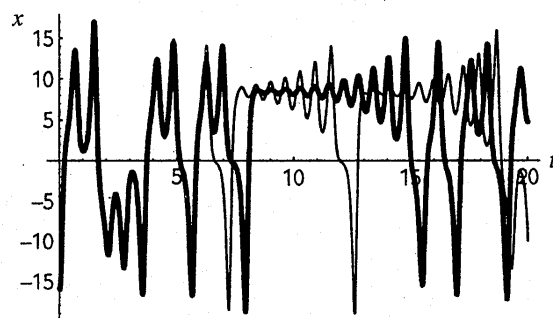
Juhime tähelepanu veel sellele, et Lorenzi süsteem (6.3.1) on mitte-lineaarne, mille põhjustavad temas esinevad korrutised xz ja xy .

Lorenzi võrrandite lahendamisel selgus veel üks huvitav mitte-lineaarsete süsteemide omapära – tundlikkus algandmete suhtes. Nimelt põhjustab väike muutus algandmetes suuri erinevusi lahendites. Joonisel 6.6 on näidatud Lorenzi numbrilise katse tulemused, mis öeldut illustreerivad. Sellel joonisel on esitatud funktsioon $x = x(t)$

erinevate algtingimuste korral. Jäme joon vastab algtingimustele $x(0) = -15,80$, $y(0) = -17,48$, $z(0) = 35,64$. Peene joone korral on $y(0)$ ja $z(0)$ samad, kuid $x(0) = -15,79$.



Joonis 6.5. Lorenzi atraktor (6.3.1): (a) iteratsioonide arv 4870; (b) iteratsioonide arv 11 000; (c) iteratsioonide arv 25 000; (d) iteratsioonide arv 150 000.

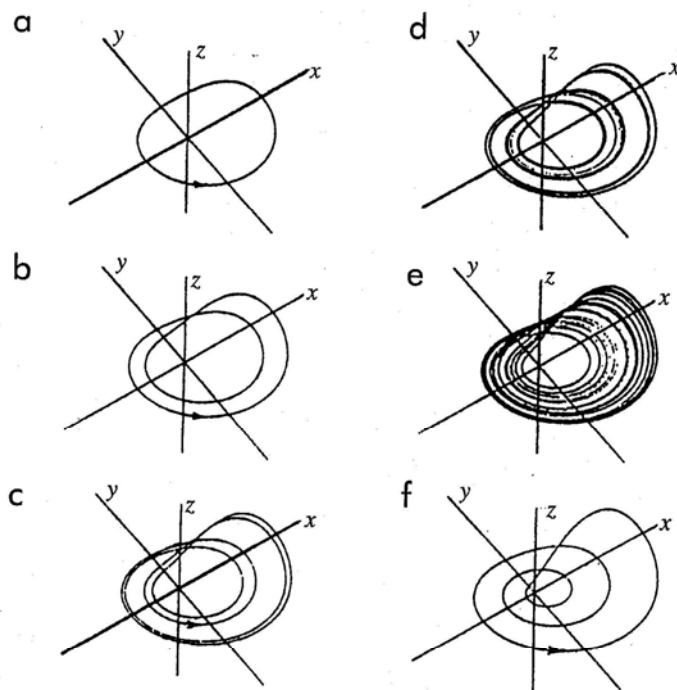


Joonis 6.6. Lorenzi atraktori x -komponent erinevatel algtingimustel. Kaplan, Glass, 1995.

Lorenzi struktuuri tekkimise tee võib olla üsna sarnane p. 6.2 vaa-
deldud perioodi kahendumisega. Selle demonstreerimiseks vaatame
veelgi lihtsamat näidet, nn. *Rössleri süsteemi*

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -y - z, \\ \dot{y} &= x + ay, \\ \dot{z} &= b + zx - cz,\end{aligned}\tag{6.3.2}$$

kus a, b, c on konstandid ja ainus mittelineaarne liige on zx kolmandas
võrrandis. Vaatleme selle süsteemi käitumist, valides $b = 2$ ja $c = 4$
ning lugedes teguri a kontrollparameetriks.



Joonis 6.7. Rössleri atraktor (6.3.2), kui $b = 2$, $c = 4$ ja kontroll-
parameetrit a varieeritakse: (a) $a = 0,3$; (b) $a = 0,35$; (c) $a = 0,375$;
(d) $a = 0,386$; (e) $a = 0,398$; (f) $a = 0,411$. Thomson, Stewart, 1986.