

4. BIFURKATSIOONID

Bifurkatsiooni mõiste

Vaatame süsteemi

$$\dot{x} = f(x, a), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad f \in \mathbb{R}^n, \quad a \in \mathbb{R}, \quad (5.1.1)$$

kus a on mingi parameeter.

Muudame veidi suurust a ja vaatame, kuidas see mõjutab faasidiagrammi. Siin on kaks võimalust: 1) faasitrajektorid muutuvad vähe, säilitades oma senise struktuuri, 2) faasitrajektoride struktuur muutub oluliselt. Viimasel juhul kõneldaksegi *bifurkatsioonist*, parameetri a väärtust, mille juures toimub bifurkatsioon, nimetatakse *kriitiliseks*. Saame seega järgmise definitsiooni:

Definitsioon: *Bifurkatsioon on faasidiagrammi kvalitatiivne muutus bifurkatsiooniparameetri väikesel muutmisel.*

Bifurkatsiooni näitena võiks tuua van der Poli võrrandi. Süsteemi (2.7.5) lahendamisel nägime, et kui parameeter a kasvab, siis väärtuse $a = 2$ läbimisel ebastabiilne fookus muutub stabiilseks sõlmeks. Seega $a = 2$ ongi bifurkatsiooniparameetri kriitiliseks väärtuseks.

Teise näitena võib tuua p. 4.1 vaadeldud varda tasakaaluasendi stabiilsuse ülesande. Parameetriks on siin koormus P . Kui see omandab valemiga (4.1.2) määratud kriitilise väärtuse, siis toimub kvalitatiivne muutus: kui siiani oli varras sirgjooneline, siis nüüd ta kõverdub, võimalikud on kaks tasakaaluasendit: sirgjoonelise varda (on ebastabiilne) ja kõverdunud varda kuju (stabiilne).

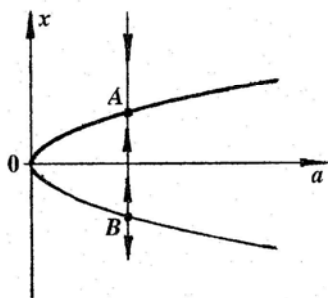
Bifurkatsioone jaotatakse lokaalseteks ja globaalseteks. *Lokaalsete bifurkatsioonide* korral toimuvad süsteemi kvalitatiivsed muutused faasiruumi püsipunktide või piirtsükli läheduses. *Globaalsed bifurkatsioonid* seevastu kutsuvad esile muutusi, mis mõjuvad kogu faasiruumile, muutes faasitrajektoride iseloomu. Lokaalsete bifurkatsioonide tähtsamateks alaliikideks on *voltbifurkatsioon*, *ülekriitiline bifurkatsioon*, *kahvelbifurkatsioon* ja *Hopfi bifurkatsioon*,

Voltbifurkatsioon

Vaatame süsteemi

$$\dot{x} = a - x^2, \quad \dot{y} = -y. \quad (5.2.1)$$

Koostame kõigepealt nn. *bifurkatsioonidiagrammi*. Võrrandist (5.2.1)₁ nähtub, et püsipunktide hulk on $x^2 = a$, mis tasandil (a, x) kujutub paraboolina (joon. 5.1). Teeme kindlaks, missugused neist püsipunktidest on stabiilsed. Selleks võtame mingi püstsirge AB . Valemist (5.2.1)₁ nähtub, et lõigu AB sees on $\dot{x} > 0$ ja koordinaat x kasvab ajas. Selle asjaolu märgime joonisele noolekestena. Analoogiliselt näitame, et väljaspool lõiku AB koordinaat x kahaneb. Seega liikumine kulgeb punkti A poole (see on atraktor), aga punktist B eemale (tegu on repelleriga). Stabiilsete püsipunktide hulk on parabooli ülemine osa $x > 0$ (joonisel on see märgitud paksema joonega). Parameetri väärtus $a = 0$ on kriitiline, sest sellega lõpeb stabiilsete püsipunktide hulk, kui $a < 0$, siis püsipunktid puuduvad. Niisugust bifurkatsiooni nimetatakse *voltbifurkatsiooniks* (inglise keeles *fold bifurcation*).

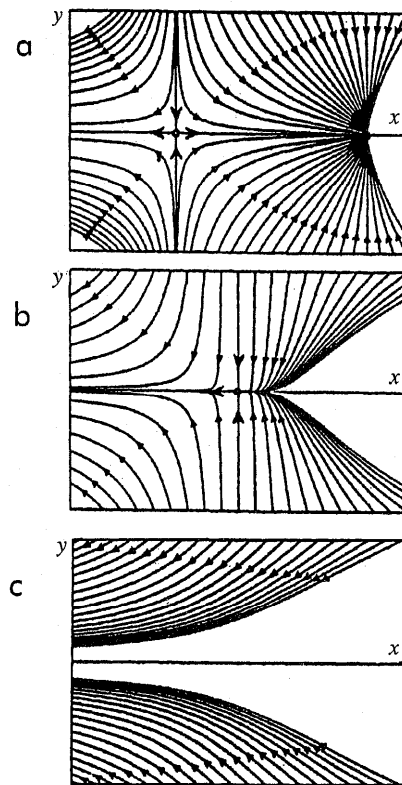


Joonis 5.1. Võrrandi $\dot{x} = a - x^2$ bifurkatsioonidiagramm.

Süsteemi (5.2.1) integreerimisel saame globaalse faasiportree, mis väärtustel $a = 0,5$, $a = 0$ ja $a = -0,5$ on esitatud joonisel 5.2. Kui $a = 0,5$, siis eksisteerib kaks püsipunkti $(-\sqrt{0,5}; 0)$ ja $(\sqrt{0,5}; 0)$. Nagu nähtub joon. 5.2a, on esimene neist sadul, teine aga stabiilne

sõlm. Kui parameetrit a vähendada, siis need punktid hakkavad teineteisele liginema ja väärtusel $a = 0$ moodustavad ühe sadul-sõlme (joon. 5.2b). Bifurkatsiooniparameetri a edasisel kasvamisel püsipunkt kaob (joon. 5.2c).

Voltbifurkatsiooni nimetatakse ka *sadul-sõlme bifurkatsiooniks*.



Joonis 5.2. Voltbifurkatsioon.
Thompson, Stewart, 1986.

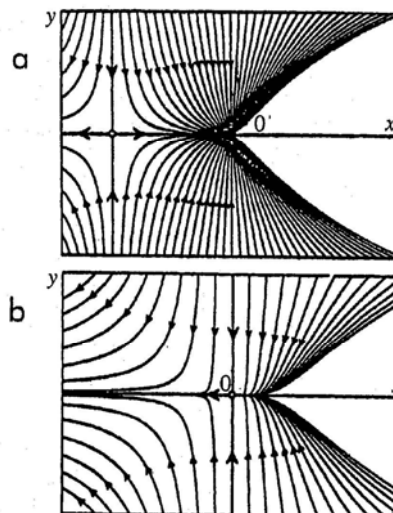
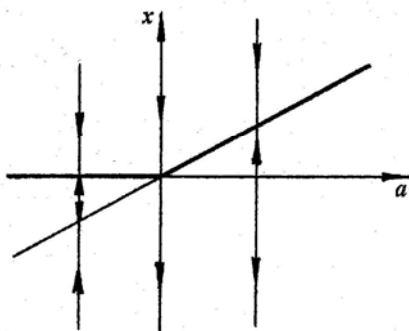
Ülekriitiline bifurkatsioon

Olgu nüüd

$$\dot{x} = ax - x^2, \quad \dot{y} = -y. \quad (5.3.1)$$

Koostame jällegi bifurkatsioonidiagrammi. Võrrandi (5.3.1)₁ püsipunktide hulk määratakse nõuetega $x = 0$ ja $x = a$, mis tasapinnal (a, x) kujutuvad kahe lõikuva sirgena (joon. 5.3).

Püsipunktide stabiilsuse kindlakstegemiseks leiame piirkonnad, kus $\dot{x} < 0$ ja $\dot{x} > 0$, ning märgime x -i muutumise suuna joonisel noolekestena. Selgub, et kui $a < 0$, siis on stabiilsete püsipunktide hulk $x = 0$; kui aga $a > 0$, siis hulk $x = a$ (need osad on joonisel märgitud jämedama joonega). Olukord muutus kohal $a = 0$, järelkult selle parameetri väärtuse korral toimuski bifurkatsioon. Niisugust bifurkatsiooni nimetatakse *ülekriitiliseks* (inglise keeles *transcritical bifurcation*).

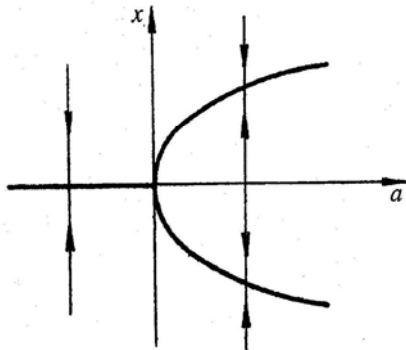


Kahvelbifurkatsioon

Seda kirjeldavad võrrandid

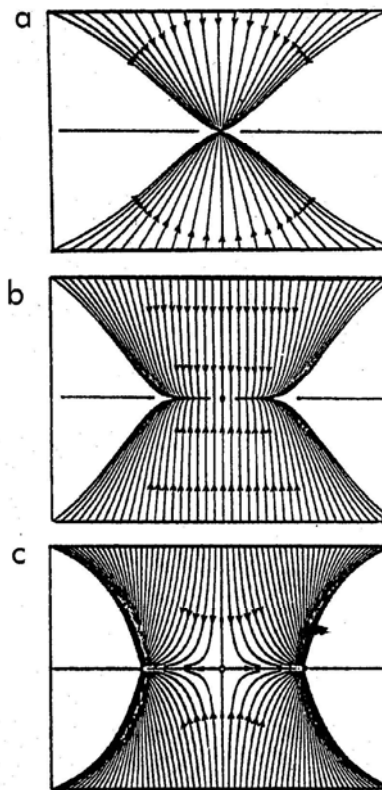
$$\dot{x} = ax - x^3, \quad \dot{y} = -y. \quad (5.4.1)$$

Võrrandi (5.4.1)₁ püsipunktide hulk on $x = 0$, $x^2 = a$. Bifurkatsioonidiagramm koosneb seega rõhtsirgest ja paraboolist (joon. 5.5). Määrame jällegi piirkonnad, kus x kasvab või kahaneb, x -i muutumise suuna määrgime noolekestega. Stabiilsete püsipunktide hulk on joonisel kujutatud paksemate joontega. Näeme, et kohal $a = 0$ toimub hargnemine. Kuna tekkinud pilt meenutab kahvlit, siis vastavat bifurkatsiooni nimetataksegi *kahvelbifurkatsiooniks* (inglise keeles *pitchfork bifurcation*).



Joonis 5.5. Võrrandi $\dot{x} = ax - x^3$ bifurkatsioonidiagramm.

Joonis 5.6. Kahvelbifurkatsioon.
Thompson, Stewart, 1986.



Hopfi bifurkatsioonid

Alustame järgmisest näitest. Olgu antud võrrandisüsteem

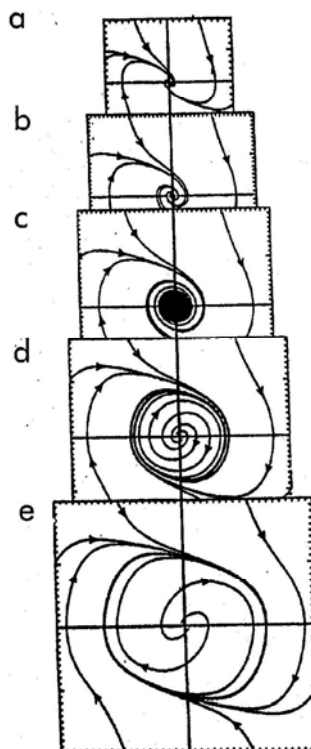
$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = ay - x - y^3, \quad (5.5.1)$$

mis omab ühe püsipunkti. Lineariseeritud süsteemi saame, kui jätame valemist (5.5.1) ära liikme y^3 . Selle süsteemi omaväärtused on

$$\lambda = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - 1}.$$

Meid huvitab juht $|a| < 2$, siis mõlemad omaväärtused on kompleksed. Kui $a < 0$, siis – nagu näidatud p. 2.4 – on püsipunkt stabiilne fookus; kui aga $a > 0$, saame ebastabiilse fookuse. Väärtus $a = 0$ annab kinnise trajektoori.

Süsteemi (5.5.1) globaalne faasidiagramm parameetri a viie eriväärtuse jaoks on esitatud joonisel 5.8. Kui $a = -1$ või $a = -0,5$, saame – nagu oli oodatagi – stabiilse fookuse. Kui $a = 0$, toimub püsipunktile $(0,0)$ liginemine väga aeglaselt. Kui $a > 0$, siis püsipunkt muutub ebastabiilseks fookuseks. Lisaks sellele juhtudel $a = 0,5$ ja $a = 1$ ilmneb stabiilne piirtsükkel, mille läbimõõt kasvab koos parameetriga a . Bifurkatsioon toimus seega parameetri väärtusel $a = 0$.



Joonis 5.8. Süsteemi (5.5.1) Hopfi bifurkatsioon (a) $a = -1$; (b) $a = -0,5$; (c) $a = 0$; (d) $a = 0,5$; (e) $a = 1$.
Thompson, Stewart, 1986.

HOPF'I BIFURKATSIOONITEOREEM

Hopfile kuulub ka järgnev teoreem.

Teoreem: Olgu süsteemil $\dot{x} = f(x, y, a)$, $\dot{y} = g(x, y, a)$:

- 1) iga a korral püsipunkt koordinaatide alguses;
- 2) olgu lineariseeritud süsteemi omaväärtused λ_1, λ_2 puhtimaginaarsed, kui $a = a_0$;
- 3) olgu $\frac{d}{da}\{Re[\lambda_1(a)]\}\big|_{a=a_0} > 0$;
- 4) olgu püsipunkt asümptootiliselt stabiilne, kui $a = a_0$.

Kui need eeldused on täidetud, siis:

- 1) $a = a_0$ on süsteemi bifurkatsioonipunkt;
- 2) eksisteerib vahemik (a_1, a_0) , nii et iga sellesse vahemikku kuuluva a korral püsipunkt on stabiilne fookus;
- 3) eksisteerib vahemik (a_0, a_2) , nii et iga sellesse vahemikku kuuluva a korral püsipunkt on ebastabiilne fookus; seda ümbritseb piirtsükkel, mille mõõtmed kasvavad koos parameetriga a .

Kuna selle teoreemi tõestus on küllaltki pikk, siis käesoleva raamatu piiratud võimaluste tõttu ei saa seda siinkohal esitada. Tõestuse võib leida näiteks J. Marsdeni, M. McCrackeni monograafiast (1976).

Ala- ja ülekriitilised Hopfi bifurkatsioonid

Nende mõistete selgitamiseks vaatame kahte järgnevat näidet.

Näide 1: Olgu antud süsteem

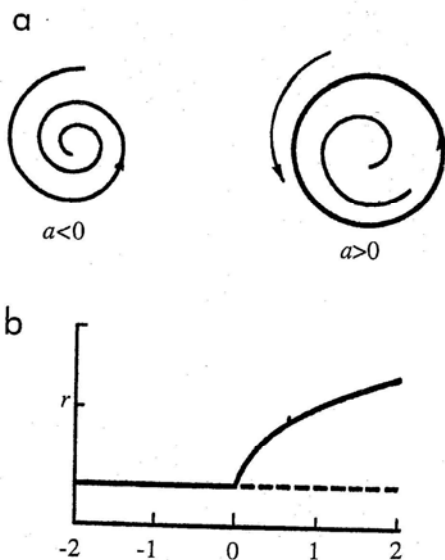
$$\dot{x} = y - x(x^2 + y^2 - a), \quad \dot{y} = -x - y(x^2 + y^2 - a), \quad (5.6.1)$$

kus a on bifurkatsiooniparameeter.

Lineariseeritud süsteemi omaväärtused on $\lambda_{1,2} = a \pm i$. Minnes üle polaarkoordinaatidele, saame viia süsteemi (5.6.1) kujule

$$\dot{r} = -r(r^2 - a), \quad \dot{\varphi} = -1. \quad (5.6.2)$$

Valemitest (5.6.2) tulenevad järgmised asjaolud. Kui $a < 0$, siis süsteemil on üks püsipunkt, milleks on koordinaatide algus ($r = 0$). Kui $a > 0$, siis tingimus $\dot{r} = 0$ on täidetud ka ringjoonel $r = \sqrt{a}$. Selle ringjoone sees on $\dot{r} > 0$, väljaspool aga $\dot{r} < 0$. Järelikult trajektoorid liginevad ringjoonele $r = \sqrt{a}$ nii seest- kui ka väljastpoolt ning see ringjoon on isoleeritud kõver (ei oma oma naabruses kinniseid trajektoore). Seega ringjoon $r = \sqrt{a}$ osutub piirtsüklikuks. Parameetri a suurenemisel piirtsükli raadius kasvab pidevalt nullist kuni väärtuseni $\sqrt{a}$. Tulemused on esitatud joonisel 5.9, kusjuures joon. 5.9 on stabiilsed lahendid märgitud pideva joonega, ebastabiilsed punktiirjoonega.



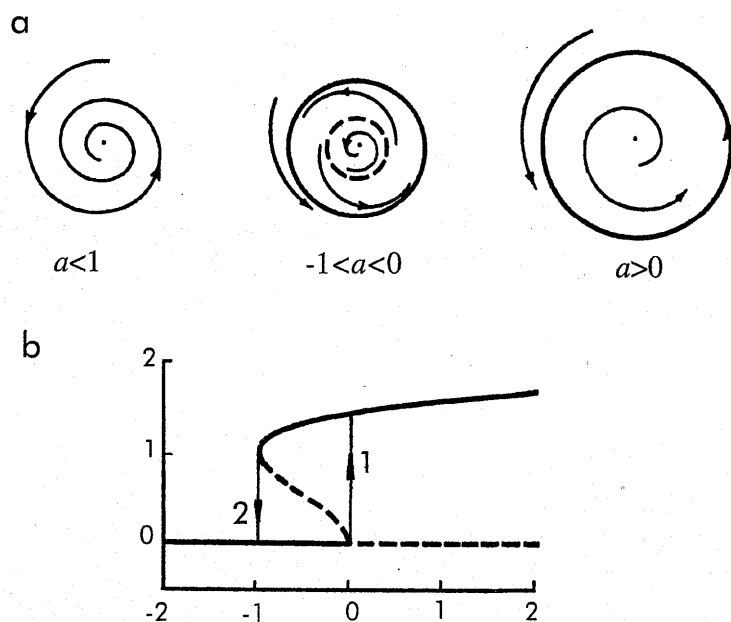
Joonis 5.9. Alakriitiline Hopfi bifurkatsioon.

Näide 2: Vaatame võrrandeid polaarkoordinaatides

$$\dot{r} = r(a + 2r^2 - r^4), \quad \dot{\phi} = 1. \quad (5.6.3)$$

Nõue $\dot{r} = 0$ on täidetud, kui $r = 0$ või $r^2 = 1 \pm \sqrt{1+a}$. Uurime kõigepealt püsipunkti stabiilsust. Püsipunkti ümbruses on r väike, seetõttu võime valemist (5.6.2)₁ kõrvaldada kõrgema järku liikmed ja piirduda lähendiga $\dot{r} = ar + \dots$. Siit nähtub, et püsipunkt $r = 0$ on stabiilne fookus, kui $a < 0$ ja ebastabiilne fookus, kui $a > 0$.

Tingimus $\dot{r} = 0$ on täidetud ka juhul, kui $r^2 = 1 \pm \sqrt{1+a}$. See võrrand omab reaalseid lahendeid, kui $a > -1$; sel juhul tekivad piirtsüklid. Kui $a \in (-1, 0)$, on neid piirtsükleid 2, kusjuures a kasvades ühe mõõtmed kasvavad, teise omad kahanevad (joon. 5.10). Kui $a = 0$, siis üks neist piirtsüklitest on kokku tõmbunud koordinaatide alguseks, teisel on raadius $r = \sqrt{2}$. Edasisel a kasvamisel saame vaid ühe piirtsükli, mille raadius koos a kasvamisega samuti kasvab. Uurides nende piirtsüklite stabiilsust, näeme, et vahemikus $a \in (-1, 0)$ üks piirtsükkel on ebastabiilne. Me saame seega joon. 5.10 toodud graafiku (ebastabiilsed osad on märgitud punktiiriga).

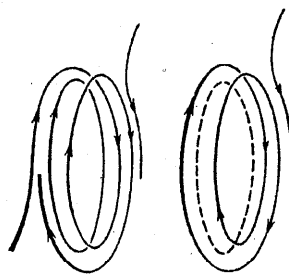


Joonis 5.10. Ülekriitiline Hopfi bifurkatsioon.

Edasisel a suurendamisel püsipunkt $r = 0$ muutub ebastabiilseks ja ilmneb stabiilne piirtsükkel raadiusega $r = \sqrt{2}$; üleminek sellele toimub hüppeliselt (lõik 1).

Analoogiline hüpe toimub ka parameetri a vähendamisel. Kui $a > -1$ on piirtsükkel $r = 1 + \sqrt{1+a}$ stabiilne; väärtusel $a = -1$ muutub ta ebastabiilseks ja kaob ootamatult. Toimub hüpe püsipunkti $r = 0$ (lõik 2). Niisuguseid "hüppega" Hopfi bifurkatsioone nimetatakse *ülekriitilisteks* (*supercritical*). Tarvitatakse ka nimetust *flip-bifurkatsioon* (ingliseelse sõna *flip* eestikeelseks vasteks on *nips*).

Ala- ja ülekriitilise Hopfi bifurkatsiooniga puutume kokku mitmesugustes teadusharudes, muu hulgas ka bioloogias ja meditsiinis.



Joonis 5.11. Piirtsüklite kahendumine.

Kui vaadelda piirtsüklite bifurkatsioone kolmedimensionaalses ruumis, siis teatud bifurkatsiooniparameetri väärtustel võivad ilmned uued sagedused ja me saame joonisel 5.11 esitatud kuju. On võimalik ka juht, kus ühekordselt perioodiline liikumine muutub bifurkatsioonil kvaasiperioodiliseks, sel juhul piirtsükkel muutub tooriks.

Globaalseid bifurkatsioone

Globaalsete bifurkatsioonide korral tingib bifurkatsiooniparameetri varieerimine liikumise iseloomu kardinaalse muutuse kogu faasiruumis või selle mitut püsipunkti haaravas osas. Toome mõningaid näiteid.

Näide 1: Vaatame süsteemi

$$\dot{x} = \mu + x^2 - xy, \quad \dot{y} = y^2 - x^2 - 1. \quad (5.7.1)$$

Püsipunktide leidmiseks võrrutame võrrandite (5.7.1) paremad pooled nulliga, saadud võrranditesüsteem annab lahendi

$$\bar{x} = \pm \frac{\mu}{\sqrt{1-2\mu}}, \quad \bar{y} = \bar{x} + \frac{\mu}{\bar{x}}.$$

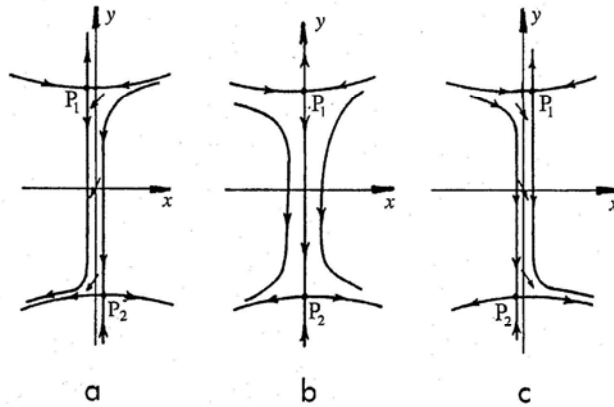
Lihtsuse mõttes piirdume juhuga, kus $|\mu| \ll 1$. Kasutades ligikaudset valemit

$$\frac{1}{\sqrt{1-2\mu}} \approx 1 + \mu,$$

saame

$$\bar{x} = \pm \mu(1 + \mu) \approx \pm \mu, \quad \bar{y} = \pm(\mu + 1) \approx \pm 1.$$

Püsipunktide koordinaadid on seega $P_1 = (\mu, 1)$, $P_2 = (-\mu, -1)$. Nende punktide uurimine näitab, et kui $\mu \neq 0$, on mõlemad sadulad (kontrollige seda!). Faasidiagrammid juhtudeks, kus $\mu < 0$, $\mu = 0$, $\mu > 0$ on toodud joon. 5.12. Sellest joonisest nähtub, et kui $\mu < 0$, siis aja t kasvades suurus x muutub $+\infty$ -st kuni $-\infty$ -ni; kui aga $\mu > 0$, siis x muutub $-\infty$ -st kuni $+\infty$ -ni. Parameetri väärtusel $\mu = 0$ muutus liikumise iseloom oluliselt kahte püsipunkti haaravas faasitasandi osas, järelikult tegu on globaalse bifurkatsiooniga.



Joonis 5.12. Süsteemi (5.7.1) faasidiagramm (a) $\mu < 0$; (b) $\mu = 0$; (c) $\mu > 0$.

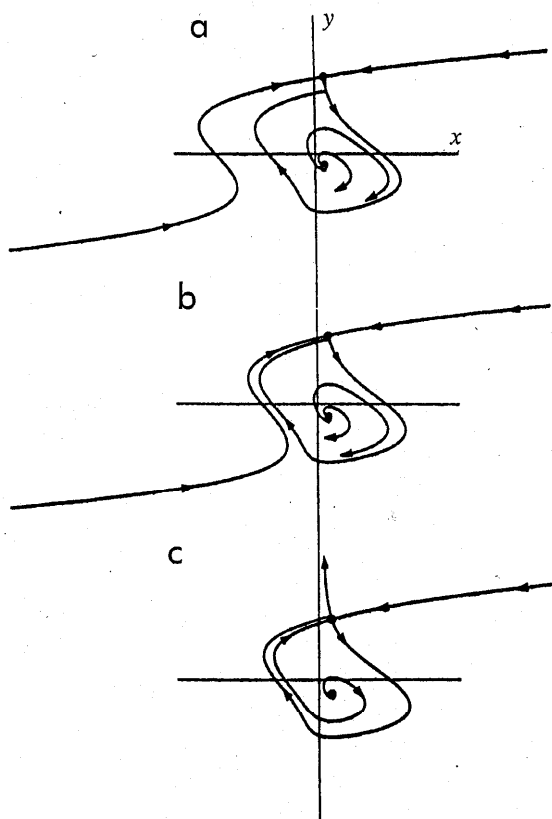
Näide 2: Olgu antud süsteem

$$\dot{x} = ky + ax(b - y^2), \quad \dot{y} = -x + C. \quad (5.7.2)$$

Kui $C = 0$, saame van der Poli võrrandi, mille faasiportreelt leiame püsipunkti ümbritseva piirtsükli. Kui $C \neq 0$, lisandub faasiportreele sadulatüüpi iseärane punkt, mille koordinaadid on

$$x = C, \quad y = \frac{k}{2aC} + \sqrt{\left(\frac{k}{2aC}\right)^2 + b}. \quad (5.7.3)$$

Valime konstantide väärtusteks $k = 0,7$, $a = 10$, $b = 0,1$, jättes suuruse $C > 0$ kontrollparameetriks. Faasiportreed kolme C eriväärtuse jaoks on esitatud joonisel 5.13. Väikese C korral on sadulpunkt piirtsüklist kaugel. Kui C kasvab, siis piirtsükkel jääb eksisteerima, ainult tema kuju muutub mõnevõrra asümmeetriliseks (joon. 5.13a). Kriitilise C väärtuse korral sadulpunkt puudutab piirtsükli (joon. 5.13b) ja edasi tungib juba piirtsükli poolt piiratud alale (joon. 5.13c). Trajektooriide analüüs näitab, et nüüd piirtsükli enam ei eksisteeri, sest kõik trajektoorid lähevad lõpmatusse. Piltlikult öeldes: välg selgest taevast hävitas piirtsükli, mis on jäljetult kadunud (*vanished into blue sky*).

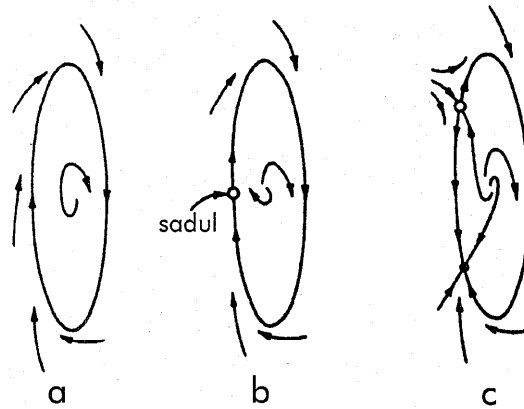


Joonis 5.13. Piirtsükli kadumine süsteemi (5.7.2) puhul (a) $C = 0, 1$; (b) $C = 0, 12$; (c) $C = 0, 14$. Thompson, Stewart, 1986.

Näide 3: Vaatame van der Poli võrrandit

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = (1 - x^2)y - x + a \sin(1, 1t). \quad (5.7.4)$$

Selle võrrandi integreerimisel ilmnevad joon. 5.14 toodud olukorrad. Enne bifurkatsiooni saame piirtsükli (joon. 5.14a); parameetri a kasvades tekib piirtsüklil sadul (joon. 5.14b). Kui veelgi suurendada a väärtust, siis sadulast eraldub sõlm (joon. 5.14c) ja see asjaolu põhjustab nähtuse, mida nimetatakse *lukustumiseks* (*mode locking*).



Joonis 5.14. Lukustumine sadula ja sõlme puhul. *Thompson, Stewart, 1986.*

Kirjeldatud bifurkatsiooni nimetatakse juhumuutuvaks (*intermittent*). Selle näite puhul ei ole tegemist puhtakujulise globaalse bifurkatsiooniga, pigemini võiks seda bifurkatsiooni nimetada *lokaalseks-globaalseks*.

Globaalsed bifurkatsioonid ilmnevad ka siis kui liikumine toimub *homokliinse trajektoori* ümbruses, seda juhtu vaatleme aga hiljem (p. 8.2).

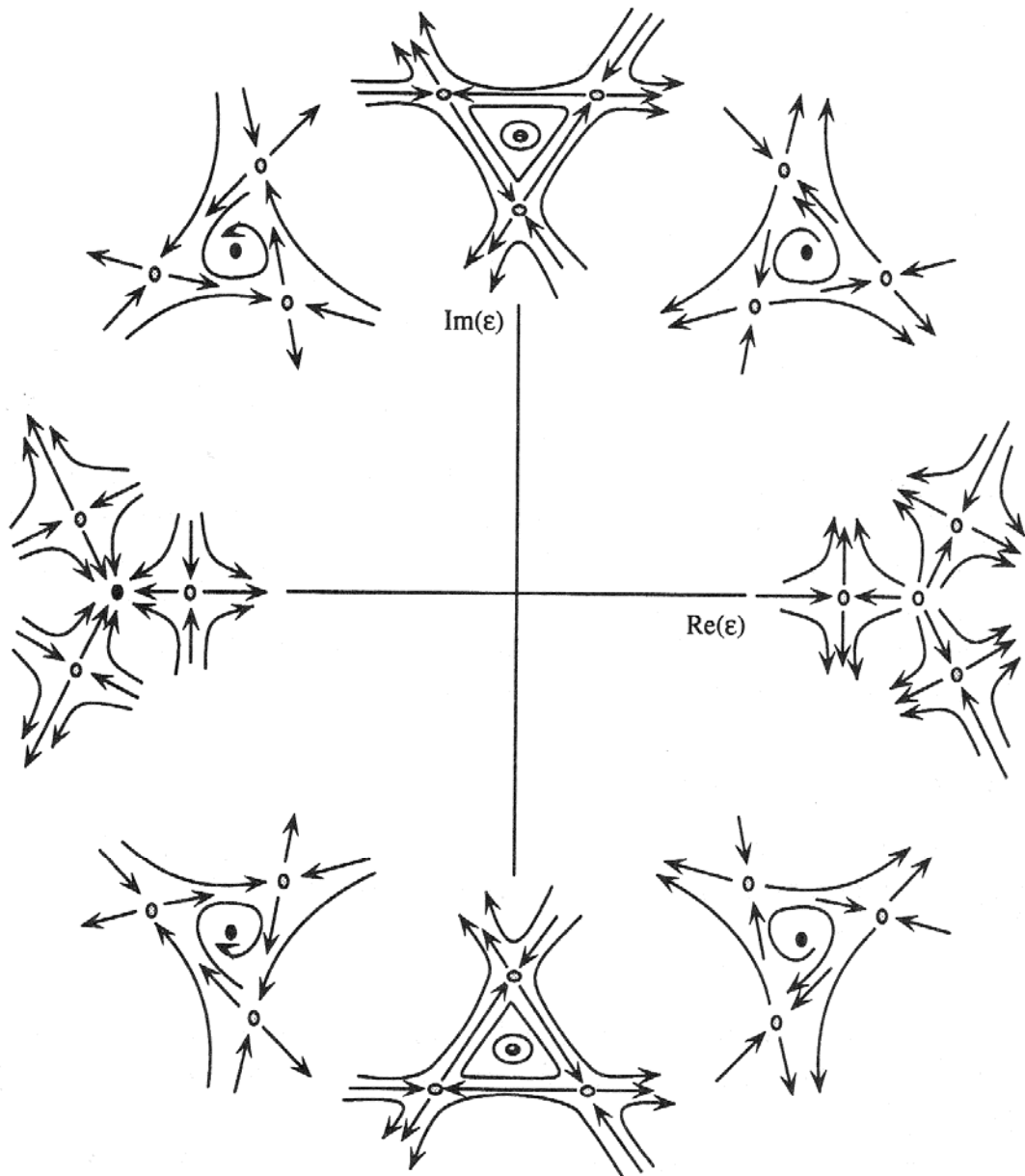


Figure 14.7. Bifurcation diagram for the resonant Hopf bifurcation at a $1/3$ resonance.

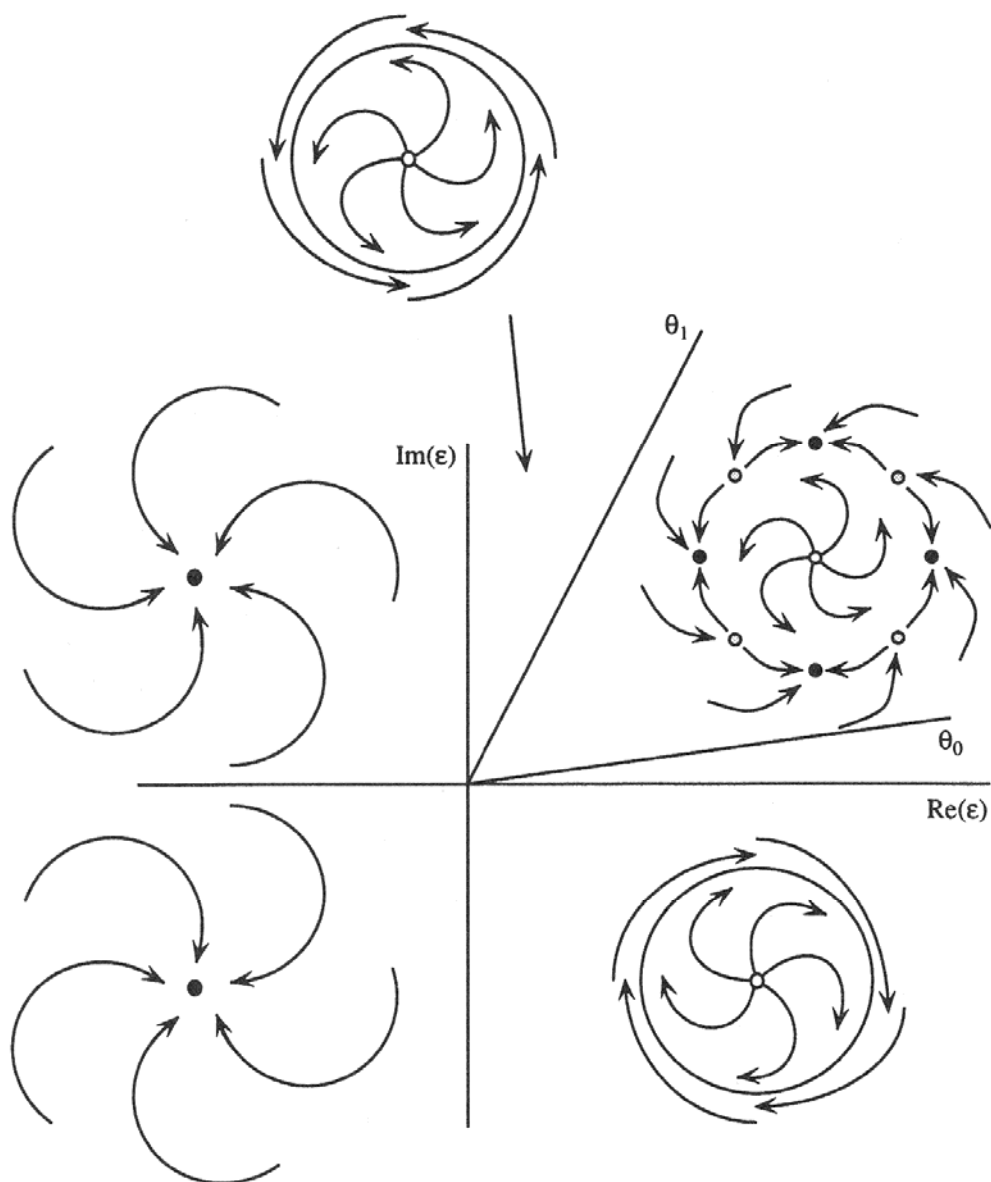


Figure 14.8. Bifurcation diagram for the resonant Hopf bifurcation at a $1/4$ resonance, $|A| > 1$.

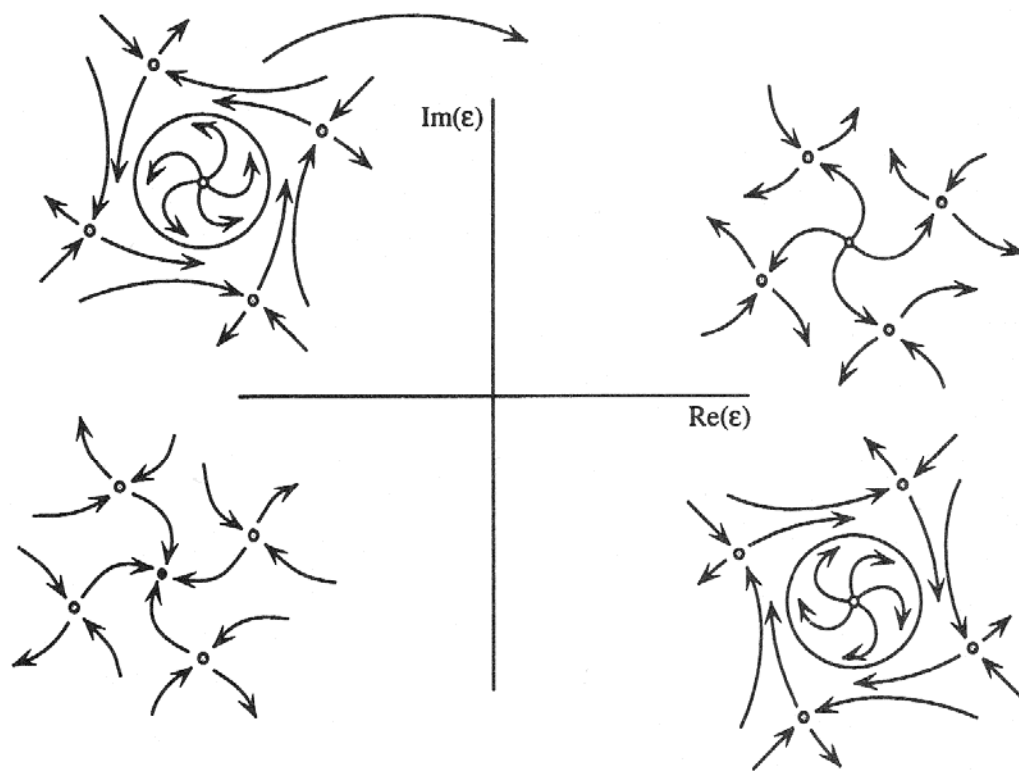


Figure 14.9. Bifurcation diagram for the resonant Hopf bifurcation at a $1/4$ resonance, $|A| < 1$.

Kujutiste bifurkatsioonid

Konkreetsuse mõttes vaatame kahedimensionaalset kujutist

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n, y_n), \\ y_{n+1} &= g(x_n, y_n),\end{aligned}\tag{5.8.1}$$

kus f ja g on mingid teadaolevad funktsioonid. Leiame selle kujutise püsipunktid ja lineariseerime võrrandid (5.8.1) nende ümbruses. Lineariseeritud kujutise omaväärtused λ_1, λ_2 leiame p. 2.12 näidatud viisil. Sobiva ortogonaalteisenduse abil võib tulemused esitada kujul (2.12.4).

Olgu $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$. Sel juhul u_n ja v_n kasvavad monotoonselt – sellist liikumist nimetame *divergeeruvaks*. Kui aga neist vähemalt üks on negatiivne, siis valemi (2.12.4) kohaselt u_n (või ka v_n) märgid indeksi kasvades vahelduvad, liikumine on *ostsilleeruv* (sellise liikumise kohta tarvitatakse ka ingliskeelset nimetust *flip*).

Vaatame, millised bifurkatsioonid on võimalikud kujutise (5.8.1) puhul. Siin tuleb eristada kolme juhtu.

(a) Olgu $|\lambda_2| < 1$; kui $\lambda_1 < 1$, siis on vaadeldav püsipunkt stabiilne sõlm; kui $\lambda_1 > 1$, on püsipunkt sadul. Kohal $\lambda_1 = 1$ toimub seega bifurkatsioon, kus sõlm kaotab oma stabiilsuse ja muutub sadulaks. Niisugust bifurkatsiooni nimetatakse *divergentsiks*.

(b) Olgu endiselt $|\lambda_2| < 1$ ja $\lambda_1 < 0$. Kui $\lambda_1 > -1$, saame jällegi stabiilse sõlme. Püsipunkti stabiilsus kaob, kui λ_1 kahanedes läbib väärtuse $\lambda_1 = -1$. Niisugust bifurkatsiooni nimetatakse *flip-bifurkatsiooniks*.

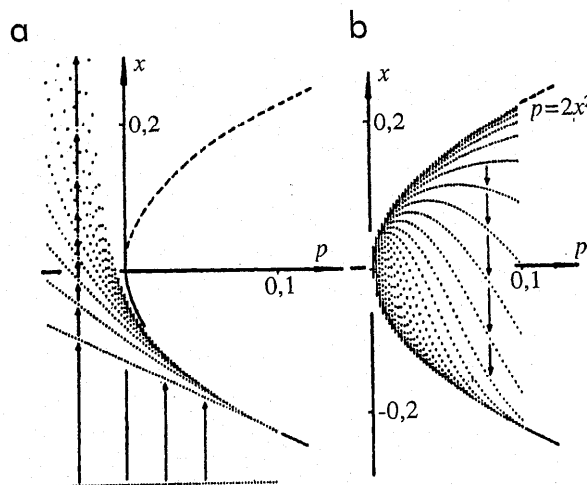
(c) Olgu λ_1, λ_2 kaaskomplekssed ja $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Nagu näidatud p. 2.12, on liikumine stabiilne, kui $\alpha^2 + \beta^2 < 1$; sel juhul on püsipunkt stabiilne fookus. Väärtusel $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ toimub stabiilsuse kadu ning sellega kaasnevat bifurkatsiooni nimetatakse *Neimarki bifurkatsiooniks* (sellist bifurkatsiooni kirjeldas esimesena Y. Neimark 1964. a.). Saab näidata, et Neimarki bifurkatsiooni korral stabiilsest fookusest tekib piirtsükkel (viimase asjaolu tõttu seda nimetatakse ka sekundaarseks Hopfi bifurkatsiooniks).

Näide 1: Vaatame ühedimensionaalset kujutist

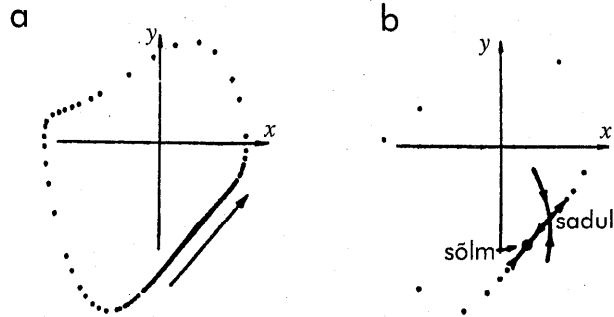
$$x_{n+1} = -x_n(1+p) + 2x_n^3. \quad (5.8.2)$$

Määrates tingimusest $\bar{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ püsipunktid, saame $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = \pm\sqrt{1+0,5p}$. Neist esimene kujutab (p, x) -teljestikus rõhtsirget, teine parabooli (joon. 5.15). Valides mingi algväärtuse x_0 , arvutades valemi (5.8.2) kohaselt x_n -i väärtused ja kujutades tulemused diagrammil 5.15, saame punktihulgad. Nooltega on näidatud iteratsioonide kulg. Joon. 5.15 selgub, et kui $p < 0$, siis stabiilsete püsipunktide hulk määratakse valemiga $\bar{x} = 0$. Kui aga $p > 0$, asuvad stabiilsed püsipunktid paraboolil. Bifurkatsioon toimub kohal $p = 0$, tegemist on kahvelbifurkatsiooniga.

Näide 2: Koostame võrrandisüsteemile (5.7.4) Poincaré diagrammi. Need võrrandid kirjeldavad van der Poli süsteemi sundvõnkumisi perioodiga $T = 2\pi/1, 1$. Selle suuruse valimegi ajaintervalliks ja kanname (x, y) -teljestikku kõik trajektoori punktid $x(n, T)$, $y(n, T)$, kus $n = 1, 2, \dots$. Seda tehes saamegi Poincaré diagrammi. Kaks niisugust diagrammi, mis vastavad parameetri väärtustele $C = 0, 1$ ja $C = 0, 14$, on kujutatud joonisel 5.16, kusjuures nooled näitavad punktide triivimise suunda, kui n kasvab. Joonisel 5.16a saame piir-tsükli, joonisel 5.16b toimub lukustumine sadula ja sõlme puhul. Analooia p. 5.7 vaadeldud näitega 3 on seega täielik.



Joonis 5.15. Kujutise (5.8.2) kahvelbifurkatsioon. *Thompson, Stewart, 1986.*



Joonis 5.16. Poincaré lõige võrrandisüsteemile (5.7.4). *Thompson, Stewart, 1986.*

Näide 3: Olgu antud kahedimensionaalne kujutis

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= y_n, \\ y_{n+1} &= ry_n(1 - x_n), \end{aligned} \quad (5.8.3)$$

kus r on kontrollparameeter.

Selle kujutise püsipunktid on $\bar{x}_1 = \bar{y}_1 = 0$ ja $\bar{x}_2 = \bar{y}_2 = (r - 1)/r$.

Lineariseerides võrrandid (5.8.3), saame

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= v_n, \\ v_{n+1} &= -r\bar{y}_i u_n + r(1 - \bar{x}_i)v_n \quad (i = 1, 2). \end{aligned}$$

Omaväärtused määrame tingimusest

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 \\ -r\bar{y}_i & r(1 - \bar{x}_i) - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Siit saame ruutvõrrandi

$$\lambda^2 - r(1 - \bar{x}_i)\lambda + r\bar{x}_i = 0.$$

Esimese püsipunkti $\bar{x}_i = \bar{y}_i = 0$ korral $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = r$. Seega tegu on kõdunud püsipunktiga.

Teise püsipunkti $\bar{x}_i = \bar{y}_i = (r - 1)/r$ korral saame

$$\lambda_{1,2} = 0,5(1 \pm \sqrt{5 - 4r}).$$

Siit tulenevad järgmised juhud.