

1. SISSEJUHATUS

Probleemid:

astronoomia

meteoroloogia

füüsika

mehaanika

bioloogia

biofüüsika

meditsiin

majandus

...

Matemaatilised mudelid

Üldiselt:

funktsioonid

algebralised võrrandid / süsteemid

kujutised (diferentsvõrrandid)

diferentsiaalvõrrandid

osatuletistega

täistuletistega

integraalvõrrandid

Näited

kujutis:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= f(x_n) \\x_{n+1} &= r x_n (1 - x_n)\end{aligned}$$

diferentsiaalvõrrand

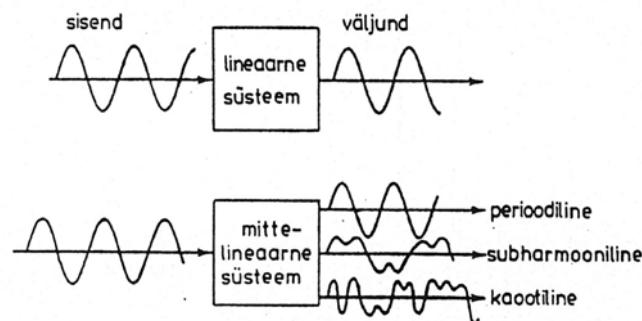
$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx + cx^3 = f \cos \omega t$$

diferentsiaalvõrrandite süsteem

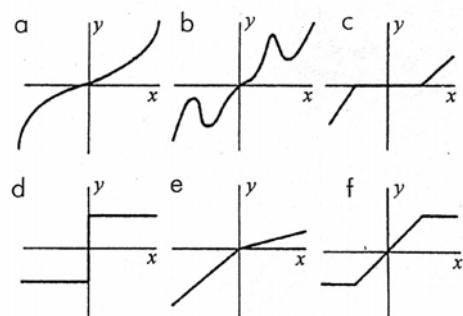
$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\sigma(x - y) \\ \dot{y} &= rx - y - xz \\ \dot{z} &= xy - bz\end{aligned}$$

σ, r, b – kordajad

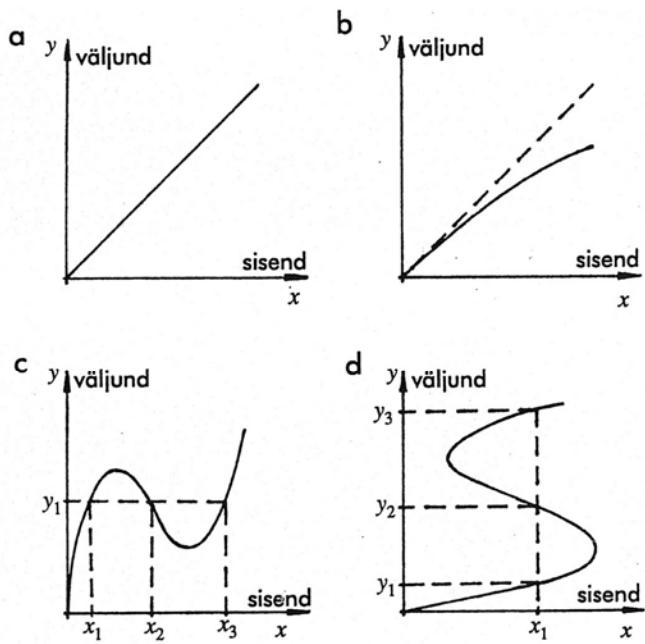
Mittelineaarsus



Joonis 1.9. Lineaarse ja mittelineaarse süsteemi väljundite erinevus. Moon 1987.



Joonis 1.10. Mittelineaarseid funktsioone.



Joonis 1.8. Sisendid ja väljundid lineaarsete ja mittelineaarsete funktsoonide puhul.

Kinemaatika. Kinemaatika on definitsiooni kohaselt mehaanika haru, mis käsiteleb kehade liikumist, arvestamata seda põhjustavaid tegureid (näiteks jõudu) ja kehade massi. Intuitiivselt võiks öelda, et kinemaatilised mittelineaarsused peavad olema seotud kiirustega ja kiirendustega.

Punktmassi dünaamikas on oluline koht liitliikumisel, kus liikumist vaadeldakse taustsüsteemis, mis ise liigub mingi liikumatu taustsüsteemi suhtes. Kõrgkooli teoreetilise mehaanika kursusest on hästi teada, et sel juhul eristatakse relatiivset liikumist (likuva taustsüsteemi suhtes) ja kaasaliikumist (likuva taustsüsteemi liikumine liikumatu taustsüsteemi suhtes). Kui liikuv taustsüsteem pöörleb liikumatu taustsüsteemi suhtes nurkkiirusega \mathbf{w}_e , siis absoluutne kiirendus \mathbf{a} on avaldatav

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_r + \mathbf{w}_e \times \mathbf{r} + \mathbf{w}_e \times (\mathbf{w}_e \times \mathbf{r}) + 2\mathbf{w}_e \times \mathbf{v}_r,$$

kus \mathbf{a}_r on punktmassi relatiivne kiirendus, \mathbf{v}_r tema relatiivne kiirus ja \mathbf{r} punktmassi raadiusvektor (Lepik, Roots, 1971) ning kasutatud on vektorkorрутise sümbolid. Kolm viimast liiget selles avaldises on mittelineaarsed: $\mathbf{w}_e \times \mathbf{r}$ väljendab pöörlemiskiirendust, $\mathbf{w}_e \times (\mathbf{w}_e \times \mathbf{r})$ aksipetaalkiirendust, $2\mathbf{w}_e \times \mathbf{v}_r$ Coriolise kiirendust.

Jääga keha pöörlemisel on kineetilise momendi teoreemist tuletavad nn. Euleri dünaamilised võrrandid (Lepik, Roots, 1971)

$$\begin{aligned} M_x &= I_x \dot{\omega}_x - (I_z - I_y) \omega_y \omega_z, \\ M_y &= I_y \dot{\omega}_y - (I_x - I_z) \omega_z \omega_x, \\ M_z &= I_z \dot{\omega}_z - (I_y - I_x) \omega_x \omega_y, \end{aligned}$$

kus M_x , M_y , M_z on välismomendi M projektsioonid, ω_x , ω_y , ω_z nurkkiiruse projektsioonid, I_x , I_y , I_z keha inertsimomendid. Jällegi on mittelineaarsed liikmed $\omega_x \omega_y$, $\omega_y \omega_z$, $\omega_z \omega_x$ mängus.

Üle minnes pideva keskkonna mehaanika probleemidele, toob kinemaatika kaasa nn. konvektiivsed liikmed. Navier'-Stokesi võrrandid hüdrodünaamikas, mis on tuletatud liikumishulga jäädvuse seadusest (s. t. Newtoni teisest seadusest sügavamale minnes), sisaldavad liikmeid kujus

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad v_y \frac{\partial v_x}{\partial y}, \quad v_z \frac{\partial v_x}{\partial z}, \quad \dots,$$

seega kiiruse komponendi ja kiiruse tuletise (gradiendi) korruitis. Taolised mittelineaarsed liikmed vedeliku liikumise võrrandis on suure tähtsusega turbulentsi uurimisel.

Mahujõud. Pideva keskkonna mehaanikas tulevad mahujõu arvesse liikumishulga arvutamisel. Üldiselt on nad konstantsed suuri sed, kuid modelleerimisel on kasutatud mõnikord ka üldistatud mahujõude, mis võivad näiteks mittelineaarselt sõltuda deformatsioonis Elektrodünaamikas võib samuti esineda mahujõud magnetiseerimise mitme voolu või likuva keskkonna puhul

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

kus q on laeng, \mathbf{v} tema kiirus ja \mathbf{B} magnetväli. Elektromagnetiline jõu arvutatakse valemist

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} \times \mathbf{B},$$

kus \mathbf{I} on vooluvektor ja \mathbf{B} magnetväli. Samalaadsed on ka $M_x \partial B_x / \partial z$ tüüpi mittelineaarsused, kus M_x on magnetilise dipooli tugevus.

Geomeetria. Pideva keskkonna deformatsioon on juba om loomult mittelineaarne. Deformatsioon arvutatakse üldjuhul siire U_k kaudu. Geomeetrilised arvutused (vt. Engelbrecht, 1983) viiva täpsete avaldisteni, mille väljendusvorm on

$$E_{kl} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_k}{\partial x_l} + \frac{\partial U_l}{\partial x_k} + \frac{\partial U_m}{\partial x_k} \frac{\partial U_m}{\partial x_l} \right],$$

kus E_{kl} on deformatsioonitensor ja U_k siire. Indeksid k ja l omava väärustus 1, 2, 3 ning ühes avaldises esinevate korduvate indeksite järgi toimub summeerimine. Lihtsustatud ühemõõtmeline valem annab

$$E_{11} = \frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial U_1}{\partial x_1} \right]^2.$$

Table 25. MEHMKE (1897).

| | | |
|--|---|--|
| 1. <i>Linear law:</i> | $\varepsilon = a\sigma$ | HOOKE (1678) |
| 2. <i>Exponential law:</i> | $\varepsilon = a\sigma^m$ | JAMES BERNOULLI (1694) ^a ; BÜLFFINGER (172 ^c) tension; HODGKINSON (1822); BACH-SCHÜLE (1897) |
| 3. <i>Parabolic law:</i> | $\sigma = a\varepsilon - b\varepsilon^2$ | HODGKINSON (1849), cast iron; HARTIG (1893), cast iron, cement, cement plaste GERSTNER (1824) ^b , iron piano wire |
| 4. <i>Hyperbolic law:</i> | | |
| A. | $\varepsilon = \frac{\sigma}{a - b\sigma}$ | Cox (1850), cast iron; |
| B. | $\varepsilon^2 = a\sigma^2 + b\sigma$ | LANG (1896), cast iron, stones, plaster WERTHEIM (1847), organic tissues |
| 5. <i>Cubic and biquadratic-parabolic law:</i> | | |
| A. | $\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3$ $\varepsilon = a\sigma + \beta\sigma^2 + \gamma\sigma^3$ | Cox (1850), cast iron J. O. THOMPSON (1891), metals, tension |
| B. | $\sigma = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c\varepsilon^3 + d\varepsilon^4$ | HODGKINSON (1849), cast iron |
| 6. <i>Exponential law:</i> | | |
| A. | $\sigma = ce^{-1/\varepsilon}$ | RICCATI (1731) |
| B. | $\varepsilon = e^{m\sigma} - 1$ | IMBERT (1880), India rubber |
| C. | $\sigma = c(e^{m\varepsilon} - 1)$ | HARTIG (1893), leather, tension; burned red clay, compression |
| D. | $\varepsilon = \sigma(a + b e^{m\sigma})$ | PONCELET (1839), brass, tension |
| E. | $\sigma = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \cdot e^{m\varepsilon}$ | HARTIG (1893), cork, compression |

British Royal Iron Committee, 1849:

„henceforth Hooke's linear law of elasticity for iron in tension, compression, and flexure should be replaced by $\sigma = A\varepsilon - B\varepsilon^2$ “

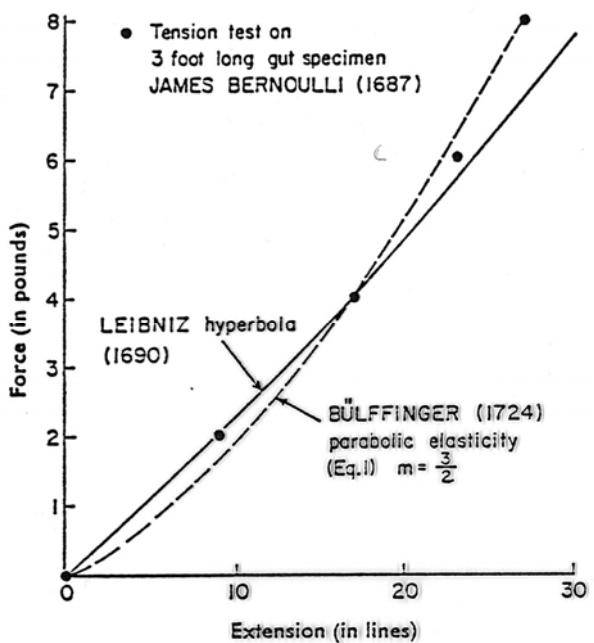


Fig. 2.1. JAMES BERNOULLI's gut string measurement.

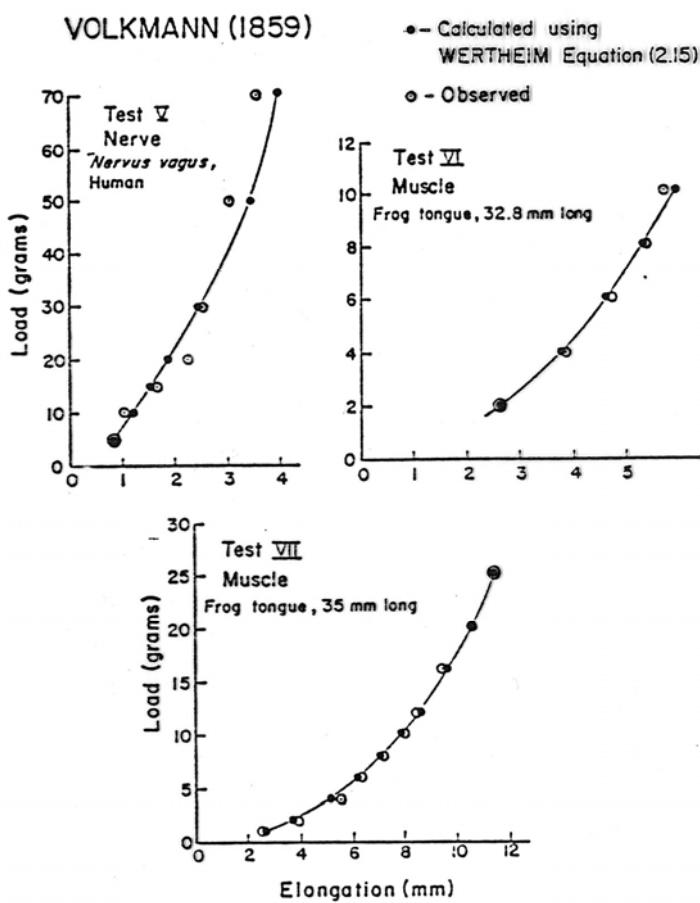
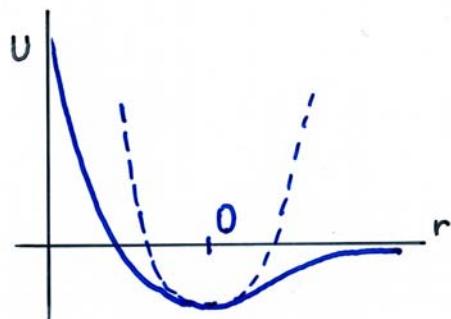


Fig. 2.25. Tensile results compared with prediction from WERTHEIM's equation.

Material (physical) nonlinearities

$$K_{ij} = \rho_0 \frac{\partial F}{\partial E_{ij}} , \quad L_{ij} = \rho_0 \frac{\partial F}{\partial U_{ij}}$$

Piola – Kirchhoff Lagrange
energy?

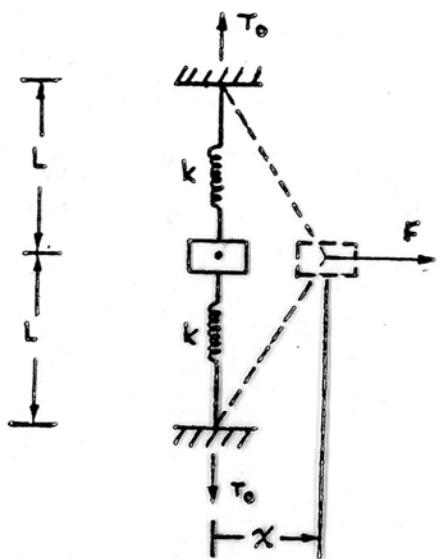


$$\begin{aligned} \rho_0 F = & \frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu I_2 + \\ & + v_1 I_1^3 + v_2 I_1 I_2 + v_3 I_3 + \\ & + \kappa_1 I_1^4 + \kappa_2 I_1^2 I_2 + \kappa_3 I_1 I_3 + \kappa_4 I_2^2 + \dots \end{aligned}$$

| | |
|--|---------------------------------|
| λ, μ | second order (Lame) |
| v_1, v_2, v_3 | third order |
| $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4$ | fourth order |
| I_i | invariants of the strain tensor |

2D:

$$\begin{aligned} K_{11} = & (\lambda + 2\mu) U_{1,1} + \left(\frac{1}{2} \lambda I_1^2 + \mu + 3(v_1 + v_2 + v_3) \right) U_{1,1}^2 + \\ & + (6v_1 + 2v_2) U_{1,1} U_{2,2} + \left(\frac{1}{2} \lambda + 3v_1 + v_2 \right) U_{2,2}^2 + \\ & + \left(\frac{1}{2} \lambda + \frac{1}{2} v_2 + \frac{3}{4} v_3 \right) U_{1,2}^2 + \dots \end{aligned}$$



$$F = \frac{2x}{(L^2+x^2)^{1/2}} \left\{ T_0 + k \left[(L^2+x^2)^{1/2} - L \right] \right\}$$

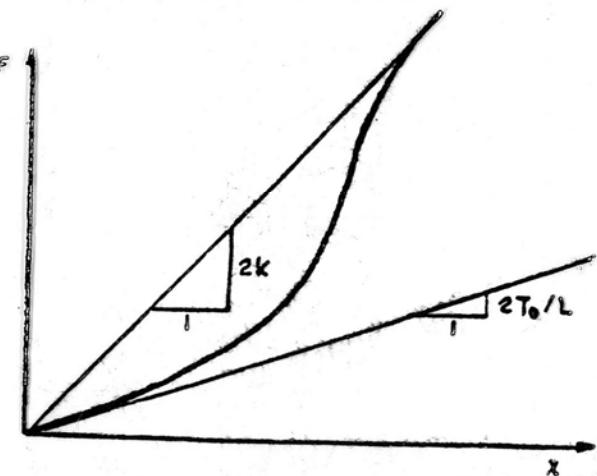
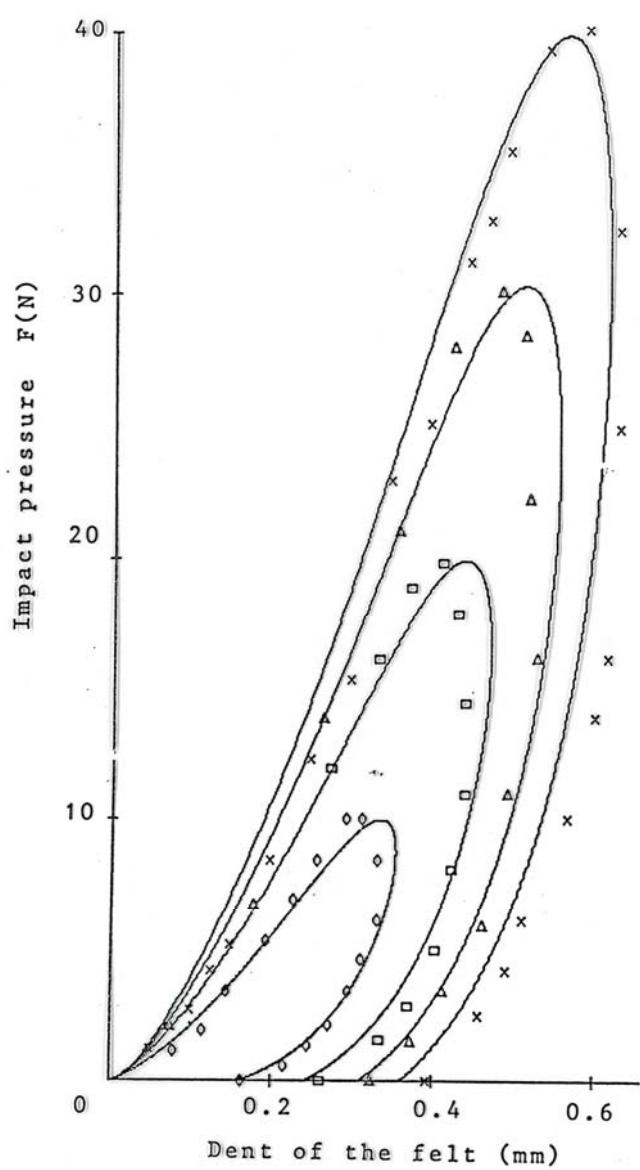
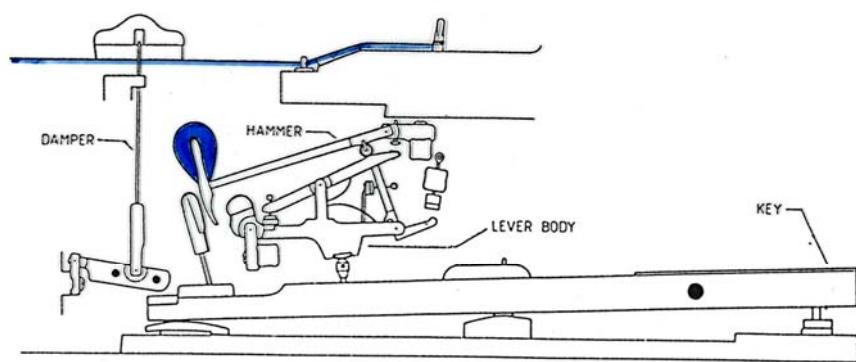


Fig. 2 GEOMETRIC SETTING IN WHICH LINEAR SPRINGS PRODUCE A NONLINEAR FORCE-DEFORMATION RELATION



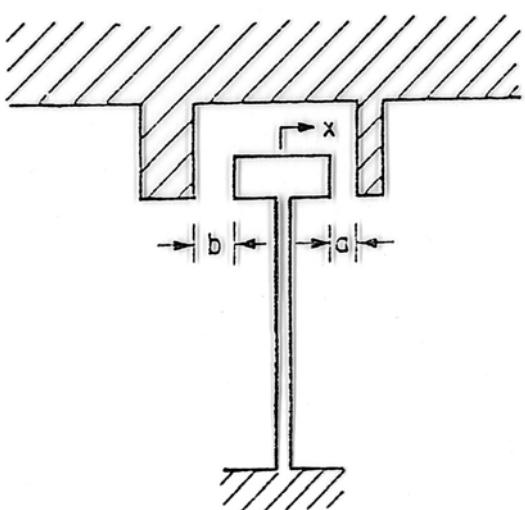


Fig. 4a MOTION OF BEAM IS ARRESTED BY ELASTIC STOPS

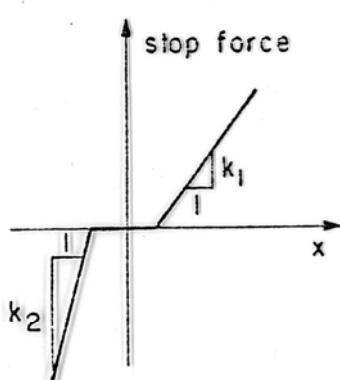


Fig. 4b FORCE-DEFORMATION RELATION FOR STOPS IS PIECEWISE LINEAR

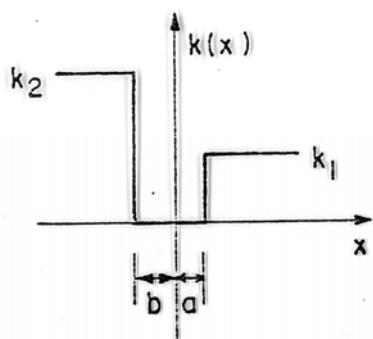


Fig. 4c EFFECTIVE SPRING CONSTANT HAS DISCONTINUITIES

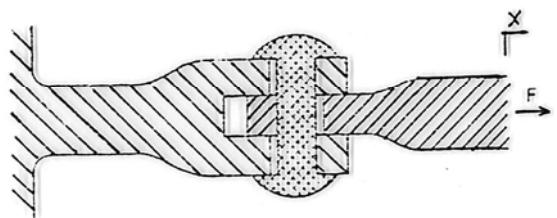


Fig. 5a RODS CONNECTED BY PIN WITH CLEARANCE

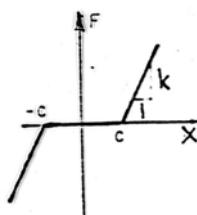


Fig. 5b FORCE-DEFORMATION RELATION IS PIECEWISE LINEAR

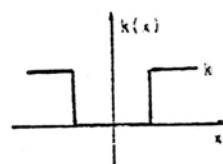


Fig. 5c DISCONTINUOUS SPRING CONSTANT

1.5. Mõtteteri

Väga väike põhjus, mille jätame tähelepanuta, põhjustab nähtuse, mis meile eksimatult silma paistab ja me ütleme siis, et see on juhuslik efekt. Kui me teaksime täpselt loodusseadusi ja algolukorda universumis alghetkel, võiksime selles universumis täpselt ennustada, mis juhtub tulevikus. Kuid isegi siis, kui loodusseadused poleks meie eest saladuskattega varjatud, teame me algolukorda vaid ligikaudselt. Kui see võimaldab meid järgnevast situatsiooni ennustada sama ligikaudsusega, on ju kõik korras. Me võime öelda, et nähtus on ennustatav ja ta on põhjustatud teatud loodusseaduste toimest. Kuid alati pole see võimalik; võib juhtuda, et väikesed erinevused algolukorra kirjeldamisel põhjustavad suuri muutusi vaadeldavas nähtuses. Väike viga algolukoras tekib suure vea hiljem. Ennustamine muutub siis võimatuks.

Henri Poincaré

Sirgjoon viib inimkonna mandumisele ..., sellist joont looduses ei esine.

F. Hundertwasser

Summa on suurem kui üksikosad kokku liidetuina.

Aristoteles

Lineaarsus tähendab seda, et reegel, mis määrab süsteemi käitumise tulevikus, ei sõltu sellest, mida süsteem teeb olevikus.

M. Feigenbaum

Ennustamine on alati raske, eriti kui see puudutab tulevikku.

N. Bohr

Täiendus vene kolleegilt: ka meie minevik on ennustamatu!

Teoreetiliste uuringute peamine püüe on selgitada vaatenurk, millega uritav objekt paistab oma lihtsaimas kujus.

J. W. Gibbs

Looduslikel nähtustel on erinevad mõõtskaalad ja nende arv on lõpmatu.

B. B. Mandelbrot

Pilved pole kerad, rannajooned pole kaared, puukoor pole sile ning välk ei levi sirgjoont mööda.

B. B. Mandelbrot

Determinism on nagu Suurbritannia kuninganna, kes valitseb, kuid ei juhi.

M. Berry

Maailma suur hommik oli hetk, mil Jumal mõistis kaost.

P. B. Shelley