9. DIMENSIONAALANALÜÜS

Definitsioon. Dimensionaalanalüüs on füüsikaliste suuruste vahelise seose leidmise meetod, mis põhineb nende suuruste dimensioonidel

vt. ENE

Võimaldab:

1. Suurte (looduslike) süsteemide analüüs mudeli põhjal
2. Sarnasuskriteeriumid
3. Võrrandite kontroll
4. Oluliste füüsikaliste mõistete kataloog

Kirjandus:

H.L.Langhaar	Dimensional Analysis and Theory of Models. Wiley, New York et al.;
Г.И.Баренблатт	Подобие, автомодельность и промежуточная асимптотика. Ленинград, Гидрометеоиздат, 1982;
G.Barenblatt	ibid, inglise keeles (2 trükki) 1996, 2003;
A.A.Sonin	The physical basis of dimensional analysis MIT, 2001.

Definitsioon. Võrrand dimensionaalselt homogeenne, kui tema vorm ei sõltu põhimõõtühikutest (põhidimensioonidest)

Näide:

Pendli periood $$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

L – pikkus, g – raskuskiirendus

$g = 9.8\ {}^{m}/_{s^2}$

$g = 32{,}2\ {}^{jalga}/_{s^2}$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{9.8}}\sqrt{L} = 2.00\sqrt{L}$$

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{32{,}2}}\sqrt{L} = 1{,}11\sqrt{L}$$

Definitsioon. Dimensioonita suuruste hulk on täielik, kui iga suurus selles hulgas on sõltumatu ja iga teine mõõduta suurus antud muutujatest on esitatav hulka kuuluvate suuruste kaudu

Näide:

hüdrodünaamika muutujad

F – jõud
L – pikkus
V – kiirus
ρ – tihedus
μ – viskoosus
g – gravitatsioonikiirendus
c – heli kiirus
σ – pindpinevus

Dimensioonita suurused:

Reynoldsi arv $\mathrm{Re} = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\upsilon}$ $\left(\upsilon = \frac{\mu}{\rho}\right)$

Survetegur $P = \frac{F}{\rho V^2 L^2} = \frac{p}{\rho V^2}$ $(p - \text{surve})$

Froude'i arv $\mathrm{Fr} = \frac{V^2}{Lg}$

Mach'i arv $M = \frac{V}{c}$

Weberi arv $W = \frac{\rho V^2 L}{\sigma}$

Iga mõõduta suurus hüdrodünaamikas on esitatav

$$(\mathrm{Re})^{\alpha_1} \cdot (P)^{\alpha_2} \cdot (\mathrm{Fr})^{\alpha_3} \cdot (M)^{\alpha_4} \cdot (W)^{\alpha_5}$$

Põhiteoreem (aastast 1914)

(Buckinghami teoreem, $\boldsymbol{\pi}$ - teoreem)

Kui võrrand (funktsionaalne sõltuvus) on dimensionaalselt homogeenne, siis on võimalik teda redutseerida ainult täielikku dimensioonita suuruste hulka sisaldavaks võrrandiks (funktsionaalseks sõltuvuseks).

Teine sõnastus:

Eksisteerigu füüsikaline seaduspärasus mõõduga muutuja funktsiooni kujul sõltuvana teistest mõõduga muutujatest. See seaduspärasus on esitatav mõõduta muutuja funktsioonina, mis sõltub teiste mõõduta muutujate kombinatsioonidest. Nende kombinatsioonide arv on üldisest mõõduga muutujate arvust väiksem mõõduga sõltumatute põhimuutujate arvu võrra.

Olgu suurus a määratav

$$a = f\left(\underbrace{a_1, \ldots, a_\kappa,}_{\textit{sõltumatud}} \quad \underbrace{a_{\kappa+1}, \ldots, a_n}_{\textit{sõltuvad}} \right)$$

Sõltuvate dimensioonid

$$[a_{k+1}] = [a_1]^{p_{\kappa+1}} \ldots [a_k]^{r_{k+1}}$$

$$\ldots .$$

$$[a_n] = [a_1]^{p_n} \ldots [a_k]^{r_n}$$

Suurus a ise

$$[a] = [a_1]^p \ldots [a_k]^r$$

Leiame suhted

$$\pi_1 = \frac{a_{k+1}}{a_1^{p_{k+1}} \ldots a_k^{r_{k+1}}}, \ldots, \qquad \pi_{n-k} = \frac{a_n}{a_1^{p_n} \ldots a_k^{r_n}}$$

$$\pi = \frac{a}{a_1^p \ldots a_k^r}$$

Need on ilmselt mõõduta suurused.

Teisendame $a = f(\ldots)$

$$\frac{a}{a_1^p \ldots a_k^r} = \pi = \frac{1}{a_1^p \ldots a_k^r} f\Big[a_1 \ldots, a_k, \pi_1 \cdot \left(a_1^{p_{k+1}} \ldots a_k^{r_{k+1}}\right), \ldots$$

$$\ldots \pi_{n-k} \cdot \left(a_1^{p_n} \ldots a_k^{r_n}\right)\Big]$$

$$= F(a_1, \ldots, a_k, \pi_1, \ldots, \pi_{n-k})$$

st. f märgib funktionaalset sõltuvust siit järgneb, et

$$a = f(a_1, \ldots, a_n) = a_1^p \ldots a_k^r \, \Phi(\pi_1, \ldots, \pi_{n-k})$$

Analüüs

Hüdrodünaamika

V, L, F, ρ, μ, g

	V	L	F	ρ	μ	g
M	0	0	1	1	1	0
L	1	1	1	-3	-1	1
T	-1	0	-2	0	-1	-2

ükskõik milline suurus π

$$\pi = V^{k_1} L^{k_2} F^{k_3} \rho^{k_4} \mu^{k_5} g^{k_6}$$

$$[\pi] = [LT^{-1}]^{k_1} [L]^{k_2} [MLT^{-2}]^{k_3} [ML^{-3}]^{k_4} [ML^{-1}T^{-1}]^{k_5} [LT^{-2}]^{k_6}$$

$$[\pi] = [M^{k_3+k_4+k_5} \cdot L^{k_1+k_2+k_3-3k_4-k_5+k_6} \cdot T^{-k_1-2k_3-k_5-2k_6}]$$

$$k_3 + k_4 + k_5 = 0$$

$$k_1 + k_2 + k_3 - 3k_4 - k_5 + k_6 = 0$$

$$-k_1 - 2k_3 - k_5 - 2k_6 = 0$$

3 võrrandit $\rightarrow$ 6 tundmatut!

$$k_1 = -2; \quad k_2 = -2; \quad k_3 = 1$$

$$\rightarrow k_4 = -1, \; k_5 = 0, \; k_6 = 0 \rightarrow \frac{F}{\rho V^2 L^2} = P$$ surveteguur

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1, \quad k_3 = 0$$

$$\rightarrow k_4 = 1, \; k_5 = -1, \; k_6 = 0 \rightarrow \frac{V L \rho}{\mu} = Re$$ Reynoldsi arv

$$k_1 = 2, \quad k_2 = -1, \; k_3 = 0$$

$$\rightarrow k_4 = 0, \; k_5 = 0, \; k_6 = -1 \rightarrow \frac{V^2}{Lg} = Fr$$ Froude'i arv

Meelevaldne valik!

$$k_1 = 10, \quad k_2 = -5, \quad k_3 = 8$$

$$\rightarrow k_4 = 8, \quad k_5 = -16, \quad k_6 = 5$$

$$\pi = V^{10} \, L^{-5} \, F^8 \, \rho^8 \, \mu^{-16} \, g^{-5}$$

$$\pi = (P)^8 \cdot (Re)^{16} \cdot (Fr)^5 !$$

Sarnasuskriteeriumid

Geomeetria mõiste – homoloogsus = sarnasus

homoloogsed punktid – 1:1 vastavus

homoloogsed kujundid

homoloogsed ajad

Üldised mõisted

Olgu meil prototüüp $x,\ y,\ z,\ t$

mudel x', y', z', t'

Homoloogsed punktid ja ajad on seotud

$x' = K_x x, \quad y' = K_y y, \quad z' = K_z z, \quad t' = K_t t$

$K_z \quad K_x \quad K_y$ skaleerimistegurid, K_t – ajategur

geomeetriliselt sarnane mudel $K_x = K_y = K_z = K_L$

kui $K_x = K_y \neq K_z$ näiteks

siis $\dfrac{K_z}{K_x}$ – moonutustegur

Definitsioon. Funktsioon $f'(x', y', z', t)$ on sarnane funktsioonile $f(x, y, z, t)$ kui suhe f'/f on konstantne kõigi homoloogiliste punktide ja aegade korral. Tegur $K_f = f'/f$ on muutumistegur.

Kinemaatiline sarnasus

Kahe süsteemi liikumine on sarnane kui homoloogsed osakesed (punktmassid) on homoloogsetes ruumipunktides homoloogsetel aegadel.

$$u = \frac{dx}{dt}, \qquad v = \frac{dy}{dt}, \qquad w = \frac{dz}{dt}$$

$$u' = \frac{dx'}{dt'}, \qquad v' = \frac{dy'}{dt'}, \qquad w' = \frac{dz'}{dt'}$$

$$u' = \frac{K_x}{K_t} u, \qquad v' = \frac{K_y}{K_t} v, \qquad w' = \frac{K_z}{K_t} w$$

Geomeetriliselt sarnased

$$K_x = K_y = K_z = K_L$$

s. t. $\frac{K_L}{K_t} = K_v$ - kiiruse tegur

Kiirendus

$$a'_x = \frac{K_x}{K_t^2} a_x, \qquad a'_y = \frac{K_y}{K_t^2} a_y, \qquad a'_z = \frac{K_z}{K_t^2} a_z$$

Dünaamiline sarnasus

Kaks süsteemi on dünaamiliselt sarnased, kui nende homoloogilistele osadele mõjuvad samad jõud.

Olgu meil $m, \quad m'$

$$m' = K_m m$$

Newton'i seadus

$$F_x' = m'a_x' \qquad F_y' = m'a_y' \qquad F_z' = m'a_z'$$

$$\frac{F_x'}{F_x} = \frac{K_m K_x}{K_t^2}, \qquad \frac{F_y'}{F_y} = \frac{K_m K_y}{K_t^2}, \qquad \frac{F_z'}{F_z} = \frac{K_m K_z}{K_t^2},$$

geomeetriliselt sarnaste süsteemide puhul

$$K_F = \frac{K_m K_L}{K_t^2}$$

Näide: Mootor: mudel 1:10 mõõdetelt, 1:3 pöörete arv

$$K_L = \frac{1}{10}, \qquad K_t = 1/3$$

$$K_v = \frac{K_L}{K_t} = \frac{1/10}{1/3} = 3/10, \qquad K_a = 9/10$$

materjal sama

$$K_m = K_L{}^3 = \frac{1}{1000} \qquad K_F = \frac{\frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{10}}{(\frac{1}{3})^2} = \frac{9}{10000}$$

Staatika: elastne deformatsioon, talad, konsoolid, vardad, ...

L – pikkus
F – jõud
M – moment
E – elastusmoodul
ν – Poisson'i tegur

$\sigma = \sigma(F,\ M,\ L,\ E,\ \nu)$ pinge
$u = u(F,\ M,\ L,\ E,\ \nu)$ siire

Dimensionaalanalüüs

$$\sigma = \frac{F}{L^2} f_1\left(\frac{F}{EL^2},\ \frac{M}{FL},\ \nu\right) \qquad \left[\frac{N}{m^2}\right]$$

$$u = \frac{F}{EL} f_2\underbrace{\left(\frac{F}{EL^2},\ \frac{M}{FL},\ \nu\right)}_{\text{mõõduta}} \qquad [m]$$

$$\overbrace{K_F = K_E K_L{}^2,\ \ K_M = K_F K_L,\ \ K_\nu = 1}^{\text{Sarnasuste gurid}}$$

$$K_\sigma = \frac{K_F}{K_L{}^2} = \frac{K_E K_L{}^2}{K_L{}^2} = K_E$$

$$K_u = \frac{K_F}{K_E K_L} = \frac{K_E K_L{}^2}{K_E K_L} = K_L$$

Kui konstruktsiooni lineaarsed mõõted muutuvad k korda, siis: rakendatud jõud muutuvad k^2 korda, rakendatud momendid k^3 korda, siirded k korda, pinged jäävad muutmatuks.

Hüdrodünaamika

1. Kokkusurumatu vedelik

$u, \ v, \ w$ - kiiruse komponendid

$$u = V f_1 \ (Re)$$
$$v = V f_2 \ (Re) \qquad Re \ – \ \text{Reynoldsi arv}$$
$$w = V f_3 \ (Re) \qquad V \ – \ \text{keskmine kiirus}$$

Seega mudelil

$$u' = V' f_1 \ (Re)$$
$$v' = V' f_2 \ (Re)$$
$$w' = V' f_3 \ (Re)$$

$$\frac{u'}{u} = \frac{v'}{v} = \frac{w'}{w} = \frac{V'}{V} = K_v$$

Kokkusurumatu vedeliku korral on kaks voolamist kinemaatiliselt sarnased kui geomeetriliselt ja kinemaatiliselt sarnaste ääretingimuste korral on Reynoldsi arv vooludel ühesugune.

2. Voolamine vaba pinnaga

$$u = V f_1 \ (Re, \ Fr, \ W)$$
$$v = V f_2 \ (Re, \ Fr, \ W)$$
$$w = V f_3 \ (Re, \ Fr, \ W)$$

Re – Reynoldsi arv

Fr – Froude'i arv

W – Weberi arv

KOKKUVÕTE

Dimensionaalanalüüs

1. Vähendab oluliselt uuritavate muutujate arvu, st. iga mitmest füüsikalisest muutujast moodustatud mõõduta/dimensioonita grupp võib olla käsitletud kui ühtne muutuja (parameeter, suurus). Väheneb katsete arv ning katsetulemuste korreleerimiseks ja interpreteerimiseks vajalik aeg.

2. Üksikute gruppi kuuluvate muutujate mõju võib määrata ühtse muutuja mõjuefektist $Re = \frac{VL\rho}{\mu} \quad \frac{\text{kiirus diam. tihedus}}{\text{viskoossus}}$

3. Tulemused ei sõltu süsteemi mõõtskaalast ja ühikutest.

4. Skaleerimine võimaldab muuta ja realiseerida sarnasustingimusi mudeli ja prototüübi (reaalsuse) vahel.

5. Mõõduta suuruste piirkonnad iseloomustavad füüsikalisi protsesse.

Näited mõõduta suurustest ja võrranditest

1. **Reynoldsi arv**

$$\mathrm{Re} = \frac{L\,V}{\nu}$$

L – diameeter $[\mathrm{m}]$

V – kiirus $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

ν – viskoossus $\left[\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}}\right]$

Kontrollime:

$$\left[\mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{m}^2}\right] = [1]$$

2. **Froude´i arv**

$$\mathrm{Fr} = \frac{V}{\sqrt{L\,g}}$$

V – kiirus $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$

L – pikkus $[\mathrm{m}]$

g – raskuskiirendus $\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$

Kontrollime:

$$\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathrm{m} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}}}\right] = [1]$$

3. Liikumisvõrrandi mõõduta kuju

Impulsi jäävus seadusest

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

u – siire $[m]$
x – koordinaat $[m]$
t – aeg $[s]$
$\lambda+2\mu$ – elastsusmoodul
ρ_0 – tihedus

$$\frac{\lambda+2\mu}{\rho_0}=c_0^2,\quad c_0 - \text{kiirus}\left[\frac{m}{s}\right]$$

Kontrollime võrrandi:

$$c_0^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

ühikuid:

$$\left[\frac{m^2}{s^2}\right]\left[\frac{m}{m^2}\right],\ \left[\frac{m}{s^2}\right]$$

Mõlema liikme ühikuks on $\left[\frac{m}{s^2}\right]$.

Tuletagem meelde Newtoni seadust!

Leiame võrrandi mõõduta kuju:

Mõõduta suurused

$$v = \frac{u}{u_0}, \qquad \tau = \frac{t}{t_0}, \qquad \xi = \frac{x}{x_0}$$

$u_0,\ t_0,\ x_0$ – mõõduga suurused

$v,\ \tau,\ \xi$ - neile vastavad mõõduta suurused

Tuletised:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \ \frac{1}{x_0}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \quad \frac{\partial \tau}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} \ \frac{1}{t_0}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial \xi} \ \frac{1}{x_0} \ \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \quad \frac{1}{x_0} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \ \frac{1}{x_0^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \tau} \ \frac{1}{t_0} \ \left(\frac{1}{\partial \tau} \quad \frac{1}{t_0} \right) = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \ \frac{1}{t_0^2}$$

Asendame:

$$c_0^2 \ \frac{u_0}{x_0^2} \ \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{u_0}{t_0^2} \ \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0$$

Teisendame:

$$\frac{c_0^2\, t_0^2}{x_0^2} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0$$

$$\frac{c_0^2\, t_0^2}{x_0^2} = k^2, \quad k^2 : \left[\frac{m^2}{s^2} \quad \frac{s^2}{m^2} \right] \quad - \quad \text{mõõduta}$$

Võrrandi mõõduta kuju

$$k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = 0$$

4. Punktmassi liikumine

$$m \frac{d^2 u}{d t^2} + \mu \frac{d u}{d t} + k u = 0$$

u – siire $[m]$

t – aeg $[t]$

m – mass $[M]$

μ – viskoossus $\left[\frac{M}{s}\right]$

k – jäikuskonstant $\left[\frac{M}{s^2}\right]$

Kontrollime dimensioone

$$\left[M \cdot \frac{m}{s^2}\right], \qquad \left[\frac{M}{s} \cdot \frac{m}{s}\right], \qquad \left[\frac{M}{s^2}\, m\right]$$

Mõõduta suurused

$$v = \frac{u}{u_0}, \quad \tau = \frac{t}{t_0}, \quad u_0, \quad t_0 \; - \; \text{mõõduga}$$

Tuletised:

$$\frac{d}{dt} = \frac{d}{d\tau}\,\frac{1}{t_0}, \qquad \frac{d^2}{dt^2} = \frac{d^2}{d\tau^2}\,\frac{1}{t_0^2}$$

Asendame

$$m\,\frac{u_0}{t_0^2}\,\frac{d^2 v}{d\tau^2} + \mu\,\frac{u_0}{t_0}\,\frac{dv}{d\tau} + k\,u_0\,v = 0$$

Teisendame

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + \frac{\mu\,t_0}{m}\,\frac{dv}{d\tau} + \frac{k\,t_0^2}{m}\,v \quad = \quad 0$$

$$\frac{\mu\,t_0}{m}: \quad \left[\frac{M}{s}\quad\frac{s}{M}\right] = [1], \qquad \frac{k\,t_0^2}{m}: \quad \left[\frac{M}{s^2}\quad\frac{s^2}{M}\right] = [1]$$

$$\frac{d^2 v}{d\tau^2} + \mu^*\,\frac{dv}{\partial\tau} + k^*\,v \quad = \quad 0$$

μ^*, k^* - mõõduta

Mc Graw-Hill Encyclopedia of Science & Technology

Table 1. Dimensional formulas of common quantities

Quantity	Definition	Dimensional formula
Mass	Fundamental	M
Length	Fundamental	L
Time	Fundamental	T
Velocity	Distance/time	LT^{-1}
Acceleration	Velocity/time	LT^{-2}
Force	Mass × acceleration	MLT^{-2}
Momentum	Mass × velocity	MLT^{-1}
Energy	Force × distance	ML^2T^{-2}
Angle	Arc/radius	0
Angular velocity	Angle/time	T^{-1}
Angular acceleration	Angular velocity/time	T^{-2}
Torque	Force × lever arm	ML^2T^{-2}
Angular momentum	Momentum × lever arm	ML^2T^{-1}
Moment of inertia	Mass × radius squared	ML^2
Area	Length squared	L^2
Volume	Length cubed	L^3
Density	Mass/volume	ML^{-3}
Pressure	Force/area	$ML^{-1}T^{-2}$
Action	Energy × time	ML^2T^{-1}
Viscosity	Force per unit area per unit velocity gradient	$ML^{-1}T^{-1}$

Alphabetical list of named groups

Name	Symbol	Definition*	Significance
Absorption no.	Ab	$k_{c_L}\sqrt{\frac{xL_f}{DV'_f}}$; k_{c_L} = liquid side mass transfer coeff, x = length of wetted surface, L_f = film thickness, V'_f = volume flow rate per wetted perimeter $[L^2/\theta]$	Dimensionless mass-transfer coefficient
Acceleration no.	$\overline{Kg}$	$E^3/\rho g^2\mu^2 = (N_{Re} \cdot N_{Fr_1})^2/(Ho)^3$	Group dependent only on physical properties and g
Advance ratio	J	V/ND; V = forward speed, D = propeller diameter	Special form of Strouhal no.
Aeroelasticity parameter	—	= Cauchy no.	Inertia force/compressibility force
Alfvén no.	N_{AL}	V_A/V (or V/V_A) (cf. Cowling no., Karman no. 2, Magnetic Mach no.)	Ratio Alfvén wave velocity/fluid velocity
Anonymous group 1	ϵ	$\beta^* c/r$ (see also Fedorov no. 2)	—
Anonymous group 2	K_1	$\beta^* \Delta n/\Delta t$; Δn = conc^n difference, Δt = temp difference $[T]$	—
Anonymous group 3	ϵ	$Dx/V'_f L_f$ (symbols as in Absorption no.); $\epsilon = Ab^2/N_{Sh}^2$	Dimensionless diffusivity
Anonymous g oup 4	$1/\alpha$ $(1/\beta)$	$\tau_W R/V_\infty \mu$; R = cylinder radius, V_∞ = velocity outside boundary layer	Frictional force/viscous force (dimensionless skin friction)
Archimedes no.	N_{Ar}	$\frac{gL^3\rho}{\mu^2}(\rho - \rho_0)$; ρ = fluid density, ρ_0 = particle density (cf. N_{Ga_1})	N_{Re} × gravitational force/viscous force
Arrhenius gro.ip	—	$E_a/\Re T$	Activation energy/potential energy of fluid
Bagnold no.	B	$3c_d\rho_g V^2/4dg\rho_p$; ρ_g = gas density, ρ_p = particle density	Drag force/gravitational force
Bairstow no.	—	V/V_{SW}; V_{SW} = velocity of sound at wall (cf. Mach no.)	Previously used for Mach no., now largely obsolete
Banser. no.	N_{Be}	$h_r A_W/V_m c$; h_r = radiant heat-transfer coeff, A_W = wall area of channel (cf. N_{St})	Heat transferred by radiation/thermal capacity of fluid
Batchelor no.	—	$VL\sigma_e/V^2_r\epsilon_e$; ϵ_e = electrical permittivity $[Q^2\theta^2/L^3M]$	—