12. VALIK MEETODEID I

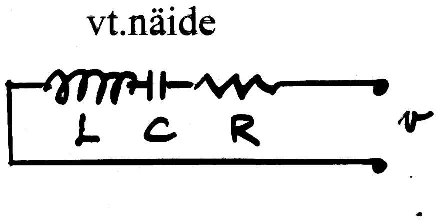
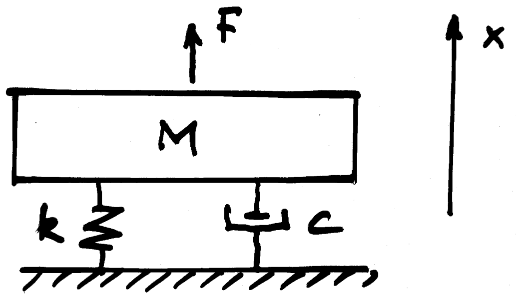
Sissejuhatus

12.1 Analoogiad ja võrdlused

12.2 Katsete planeerimine (must kast)

12.3 Abstraktne realisatsioonitehnika

12.1 Analoogiad

Elektriline süsteem	Mehaanikaline süsteem
	

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{c} = v \qquad M\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F$$

	Mõju e	Voog f	Impulss $p = \int e\,dt$	Siire $q = \int f\,dt$
Meh. jõud	jõud F [N]	kiirus v [m/s]	lin.moment P [Ns]	lin.siire x [m]
Meh.moment (pööre)	pöörde moment τ [Nm]	nurk- kiirus ω [rad/s]	h [Nms]	pöörde nurk θ [rad]
Elektrotehn.	pinge e [V]	vool i [A]	voog λ [Vs]	laeng q [c]
Kokkusuru- matu vedelik	rõhk p [N/m^2]	mahu voog Q [m^3/s]	P_p [NS/m^2]	mahu siire V [m^3]

Maavärinate mudel

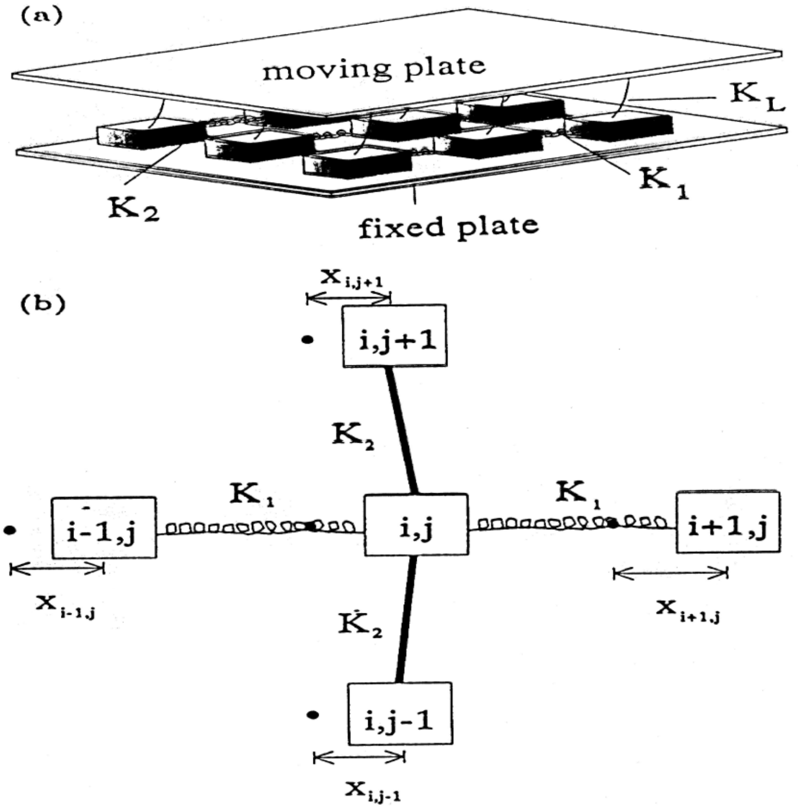


Fig. 1. The geometry of the Burridge-Knopoff spring-block model. (*a*) The two-dimensional system of blocks connected by springs. The strain of the blocks increases uniformly as a respond to the relative movement of the rigid plates. (*b*) A detailed picture of a given block (i,j) and its surroundings.

As a first step, we map the two-dimensional spring-block model into a continuous cellular automaton model. We define an $L \times L$ array of blocks by (i,j), where i,j are integers, $1 \leq i,j \leq L$. The displacement of each block from its relaxed position on the lattice is defined as $x_{i,j}$. The total force exerted by the springs on a given block (i,j) is expressed by

$$\begin{aligned} F_{i,j} \quad = \quad & K_1 \cdot [2x_{i,j} - x_{i-1,j} - x_{i+1,j}] \\ & + K_2 \cdot [2x_{i,j} - x_{i,j-1} - x_{i,j+1}] \\ & + K_L \cdot x_{i,j}, \end{aligned} \tag{4}$$

where K_1, K_2, and K_L denotes the elastic constants (see Figure 1*b*). When the two rigid plates move relative to each other, the total force on each block increases uniformly (with a rate proportional to $K_L \cdot V$, where V is the relative velocity between the two rigid plates) until one site reaches the threshold value and the process of relaxation begins (an earthquake is triggered). It can easily be shown (see Appendix A) that the redistribution of strain after a local slip at the position (i,j) is given by the relation

$$\begin{aligned} F_{i\pm1,j} & \rightarrow F_{i\pm1,j} + \delta F_{i\pm1,j} \\ F_{i,j\pm1} & \rightarrow F_{i,j\pm1} + \delta F_{i,j\pm1} \\ F_{i,j} & \rightarrow 0, \end{aligned} \tag{5}$$

where the increase in the force on nearest-neighbor blocks is

$$\begin{aligned} \delta F_{i\pm1,j} &= \frac{K_1}{2K_1 + 2K_2 + K_L} \cdot F_{i,j} = \alpha_1 \cdot F_{i,j} \\ \delta F_{i,j\pm1} &= \frac{K_2}{2K_1 + 2K_2 + K_L} \cdot F_{i,j} = \alpha_2 \cdot F_{i,j}. \end{aligned} \tag{6}$$

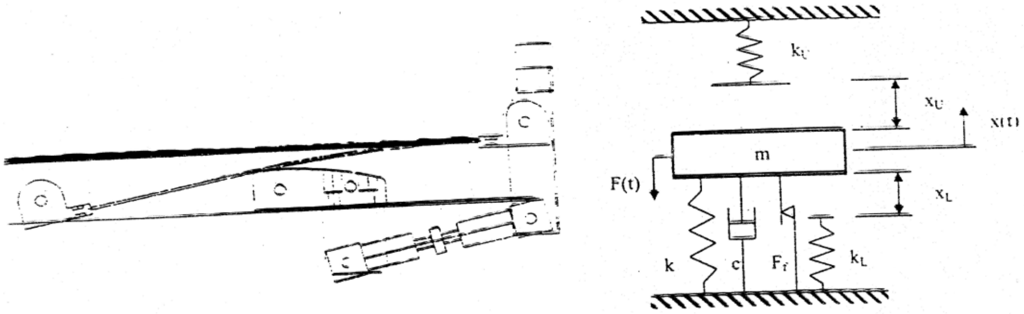


Fig. 2. A schematic and dynamic model of a pantograph current collector suspension [43]

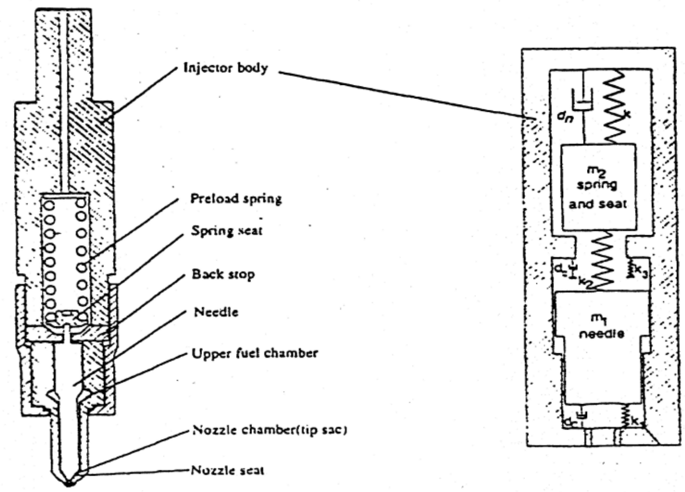


Fig. 4. Schematic and dynamic model of an injector valve [49].

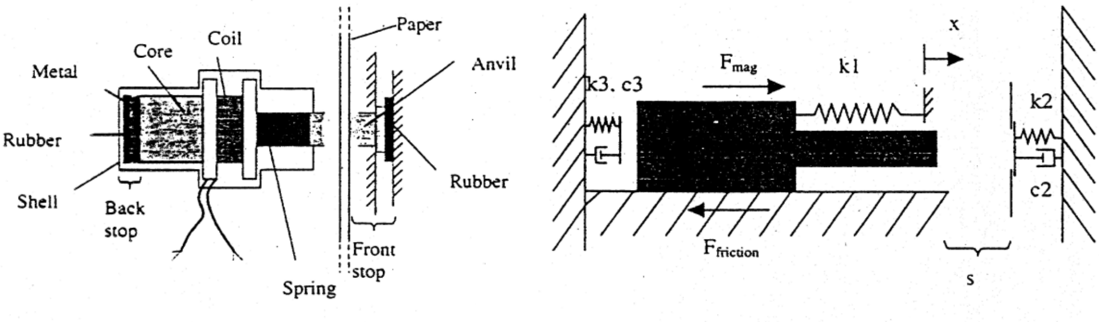


Fig. 7. A Braille printer impact hammer and a theoretical model [65].

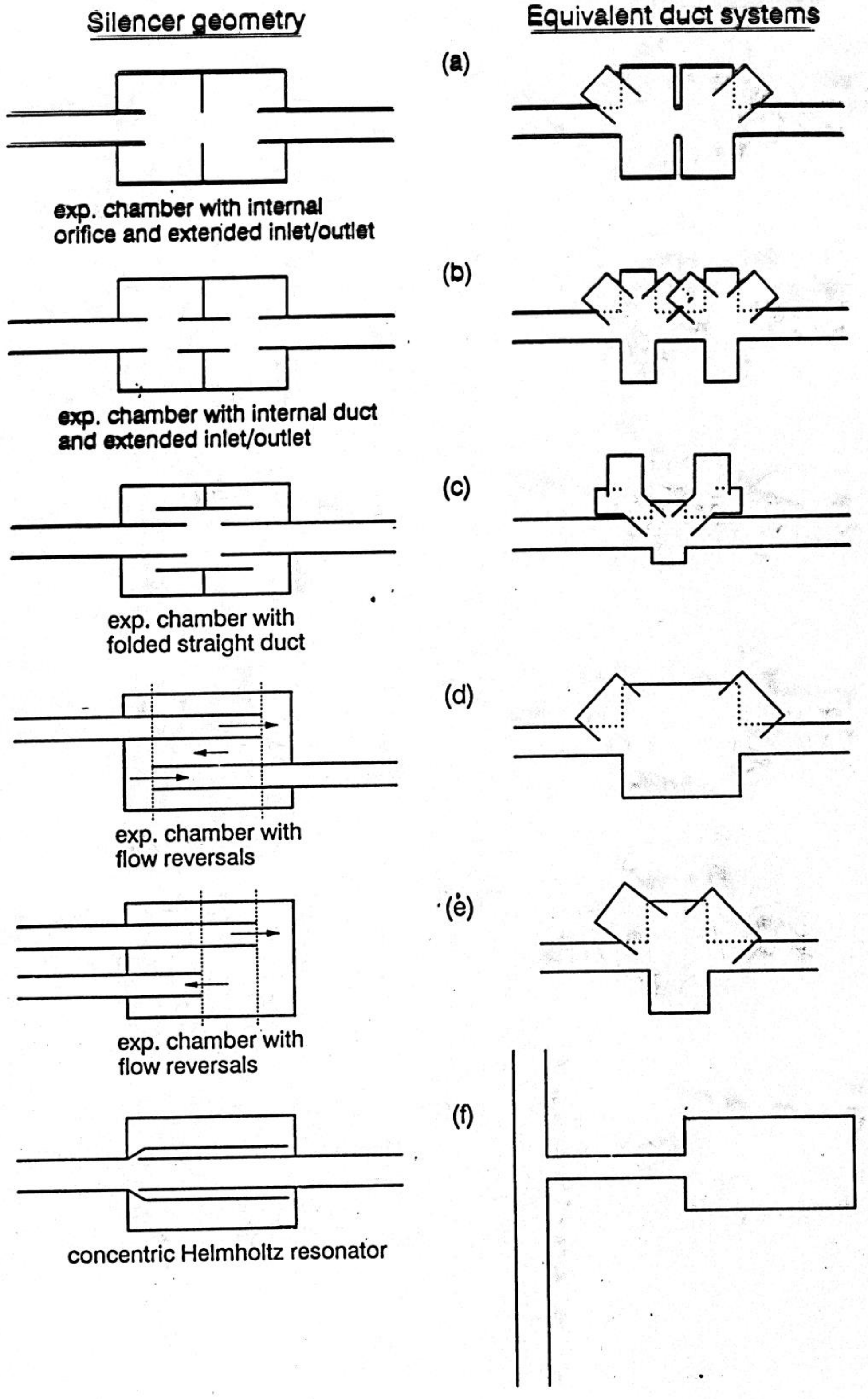


Fig. 13 – Acoustically equivalent duct systems adopted to model complex silencers using the nonlinear numerical code.

12.2 KATSETE PLANEERIMINE

1. Eesmärk

sisend	must	väljund
→	kast	→

Näide tehnoloogiline protsess keemiatööstuses

sisendid	väljund
lähteainete kontsentratsiooni	toote saagis
temperatuur	
rõhk	
katalüsaatorid	
. . .	

Katsetingimuste parim valik –
teatud katsete arvu juures – kõige täpsemad,
üksikasjalisemad
andmed

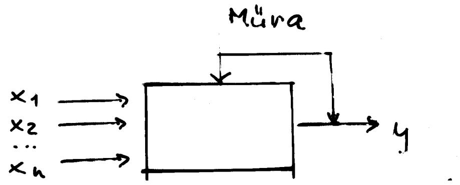
Katsete min arv?

Katsete planeerimine – ühe katseseeria iga üksiku katse maksimaalne ärakasutamine, matemaatilise seose määramiseks sisendi(te) ja väljundi vahel; selle usaldatavus, kehtivuspiirkond.

Harilikult: lineaarne lähend
ruutlähend

I.Petersen Katsete planeerimine. Tallinn, Valgus, 1966

2. Mudel



sisendid väljund

Sisendid (faktorid):

juhitavad	(rõhk, temp, ainete hulk…)
mittejuhitavad	(keemiline koostis, välis-temperatuur …)
kvantitatiivsed	
kvalitatiivsed	(on / ei ole tüüpi)

kvalitatiivsed – kahenivoolised sisendid:

jah : + , 1

ei : - , 0

kvantitatiivsed – kahenivoolised põhinivoo x^0 suhtes, varieerimisühik 1

$x^0 + 1$, +

$x^0 - 1$, -

Väljund: kvantitatiivne

Müra: väljundi mõõtmisel tehtud viga, väliskeskkonna mittearvestatavad muutused, juhuslikud muutused (saastumine, …), sisendite mittearvestatavad muutused

3. Matemaatiline mudel

$$y = F(x_1, x_2, ..., x_n)$$

Ei otsita täpselt funktsiooni F, vaid tema teatud mõttes parimat lähendit mingist funktsioonide klassist

Lineaarne mudel

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n$$

Ruutmudel

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + ... + b_n x_n$$
$$+ b_{12} x_1 x_2 + b_{13} x_1 x_3 + ... + b_{n-1,n} x_{n-1} x_n +$$
$$+ b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2 + ... + b_{nn} x_n^2$$

n	sisendid	- lineaarne mudel	$n+1$	kordajat
		ruutmudel	$\frac{1}{2}(n^2 + 3n + 2)$	kordajat

Üldine mudel:

$$\psi(y) = b_0\varphi_1(x_1) + b_2\varphi_2(x_2) + ... + b_n\varphi_n(x_n)$$

Lineaarne mudel:

milliste sisendite suurendamine
suurendab väljundit $(b_i > 0)$
vähendab väljundit $(b_i < 0)$

Ruutmudel

millal väljund on maksimaalne
minimaalne
(kui see on katsete diapasoonis)

Aeg?

4. Kahenivooline katseplaan

Sisendid	x_1,	x_2,	… ,	x_n
Põhinivood	x_1^0,	x_2^0,	… ,	x_n^0
Varieerimis-ühikud	l_1,	l_2,	… ,	l_n

tähistus $\quad x_i^0 + l_i \quad +$

$\qquad\qquad x_i^0 - l_i \quad -$

sisendite arv $n = 4$

Katseplaani maatriks
$$\left\| \begin{matrix} - & + & - & - \\ - & - & - & - \\ + & + & - & + \end{matrix} \right\| \quad N = 3 \text{ katsete arv}$$

Näide:

x_1	–	katalüsaatori kasutamine (K)
x_2	–	temperatuur
x_3	–	kontsentratsioonide suhe
x_4	–	segamine protsessi vältel (jah, ei)
$y^{(1)}$, $y^{(2)}$	–	tulemused (saagis)

		x_1	x_2	x_3	x_4	$y^{(1)}$	$y^{(2)}$
Põhinivoo		-	100	1,0	-		
Varieerimisühik		-	10	0,2	-		
Alum.nivoo (-)		ei ole K	90	0,8	ei segata		
Ülem.nivoo (+)		on K	110	1,2	segatakse		
Katsed	1	-	+	-	-	$y_1^{(1)}$	$y_1^{(2)}$
	2	-	-	-	-	$y_2^{(1)}$	$y_2^{(2)}$
	3	+	+	-	+	$y_3^{(1)}$	$y_3^{(2)}$

Näide:

$$\begin{array}{cc} \left\| \begin{array}{ccccccc} - & - & - & - & - & \cdots & - \\ + & - & - & - & - & \cdots & - \\ - & + & - & - & - & \cdots & - \\ - & - & + & - & - & \cdots & - \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ - & - & - & - & - & \cdots & + \end{array} \right\| & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ \\ N \end{array} \end{array}$$

1-2 katse vahe – esimese faktori mõju

1-3 katse vahe – teise faktori mõju

…..

Puudused

1. iga mõju ainult ülejäänute alumisel nivool
2. iga mõju ainult ühekordse väljundite vahe mõõtmisega

Kuidas valida katseplaani?

Juhuslikult?

Leida reeglid, mis annaksid parima tulemuse?

5. Ortogonaalne katseplaan

Soodsaim olukord:

Kõigi faktorite mõjude määramiseks saaks kasutada katseseeria kõiki katseid

Olgu meil kahenivooline katseplaan

$$\|x_{ij}\| = \left\| \begin{matrix} x_{11} & x_{21} & \dots & x_{n1} \\ x_{12} & x_{22} & \dots & x_{n2} \\ x_{1N} & x_{2N} & \dots & x_{nN} \end{matrix} \right\|$$

$i = 1,2,\dots,\ n -$ sisendite arv

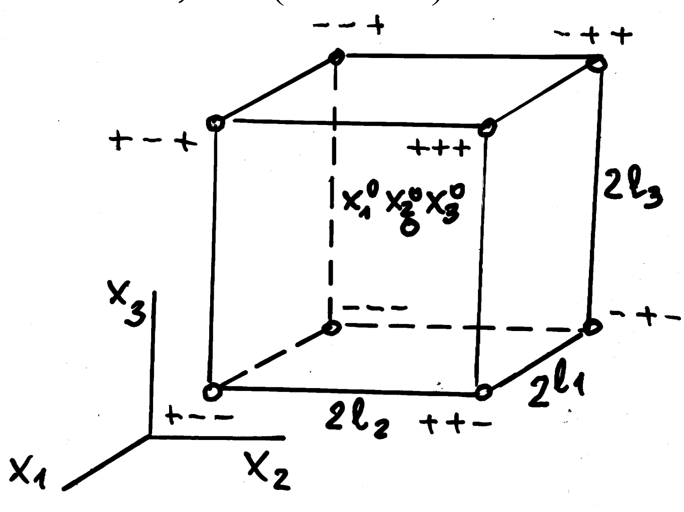
$j = 1,2,\dots,N -$ katsete arv

Loeme siin $x_{ij} = +1$ kui +

$x_{ij} = -1$ kui -

n sisendiga protsess on iga katsepunkt n-dimensionaalses ruumis

Kui n = 3, siis (vt. näide)



Kui n > 3, siis vastav n – dimensiooniline risttahukas

Faktori x_i peaeefekt:

$$x_i \quad \text{peaefekt} = \frac{2}{N} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j$$

See vastab väljundi keskmisele juurdekasvule faktori üleminekul alumiselt nivoolt ülemisele.
Lineaarne mudel

Kvantitatiivsed faktorid

$$y = b_0 + b_1(x_1 - x_1^0) + b_2(x_2 - x_2^0) +$$
$$+ \ldots + b_n(x_n - x_n^0)$$

$$b_i = \frac{x_i \quad \text{peaefekt}}{2 l_i} = \frac{1}{N l_i} \sum_{j=1}^{N} x_{ij} y_j$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

S.o. y juurdekasv kui x_i muutub 1 ühiku võrra

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} y_i$$

kvalitatiivsed faktorid

$$b_i(x_i - x_i^0) \rightarrow (x_i \ \text{peaefekt}) \, x_i$$

$$x_i = 0, \text{ kui } x_i \text{ on alumisel nivool}$$

$$x_i = 1, \text{ kui } x_i \text{ on ülemisel nivool}$$

Ortogonaalsete katseplaanide näited:

$$\begin{Vmatrix} - & + \\ + & - \end{Vmatrix} \qquad \begin{Vmatrix} + & - & - \\ - & - & + \\ + & + & + \\ - & + & - \end{Vmatrix}$$

$$\begin{Vmatrix} + & + & - & + & - \\ - & - & + & + & + \\ + & - & + & - & - \\ - & + & - & - & + \\ - & + & + & - & - \\ + & - & - & - & + \\ - & - & - & + & - \\ + & + & + & + & + \end{Vmatrix}$$

Faktori x_i mõju väljundile avaldub väljundi muutumises üleminekul x_i – teljega ristuvalt "alumiste" nivoode tahult "ülemiste" nivoode tahule.
Seega on vaja keskmiste väärtuste vahet. Mõlemad tahud võrdselt arvesse $\rightarrow N$ peab olema paarisarv ja mõlemal tahul $N/2$ punkti. Järelikult, maatriksi i-ndas veerus $N/2$ arvu +1 ja $N/2$ arvu -1 ehk

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij} = 0, \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (1)$$

Et keskmiste väärtuste vahe iseloomustaks ainult faktorit x_i, peavad mõlema tahu katsepunktide "keskmised" asetsema kohakuti. x_i – teljega ristuvatel tahkudel peavad kõigi ülejäänud koordinaatide aritmeetilised keskmised olema võrdsed

$$\frac{1}{N/2}\sum_{\substack{j \\ x_{ij}=+1}} x_{kj} = \frac{1}{N/2}\sum_{\substack{j \\ x_{ij}=-1}} x_{kj}, \qquad k \neq i, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Seda saab teisendada kujule

$$\sum_{j=1}^{N} x_{ij}\, x_{kj} = 0 \qquad (i \neq k) \qquad (2)$$

St. Katseplaani maatriksi iga kahe (erineva) veeru vastavate elementide korrutiste summa peab olema 0 (ortogonaalsuse tingimus)

(1), (2) täidetud $\rightarrow$ ortogonaalne katseplaan

6. Faktorite interaktsioon

Kuidas muutub ühe faktori mõju teise faktori muutuse tõttu?

vt. näide

x_i ja x_k interaktsioon =

$$= \frac{1}{2}\left[(x_i \text{ peaefekt } x_k = +1 \text{ puhul}) - (x_i \text{ peaefekt } x_k = -1 \text{ puhul})\right]$$

$$x_i \text{ ja } x_k \text{ interaktsioon} = \frac{2}{N}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}\, x_{kj}\, y_j$$

x_i ja x_k interaktsioon = x_k ja x_i interaktsioon

x_i ja x_k interaktsioon = x_i ja x_k peaefekt

Oluline teada:

millised kahe faktori interaktsioonidest

võib lugeda nulliks

on oluliselt positiivsed

on olulised negatiivsed

7. Täisfaktoriaalne katseplaan

kahenivooline katseplaan on täisfaktoriaalne, kuidas temas sisendid esinevad kõigil võimalikel erinevatel nivoode kombinatsioonidel

n sisendit $\rightarrow$ 2^n katset

n = 1

$-$
$+$

n = 2

$-$	$-$
$+$	$-$
$-$	$+$
$+$	$+$

n = 3

$-$	$-$	$-$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$+$	$+$	$-$
$-$	$+$	$-$
$+$	$+$	$+$

ortogonaalsuse

tingimus - täidetud

laiendatud maatriks

vasakule
veerg
“+” dest

lähte-
maatriks

x_0	x_1
+	−
+	+

x_0	x_1	x_2	x_{12}
+	−	−	+
+	+	−	−
+	−	+	−
+	+	+	+

paremale lähtemaatriksi
erinevate veergude
kahe-, kolme-,…, n-kaupa

							x_1
				x_1	x_1	x_2	x_2
x_0	x_1	x_2	x_3	x_2	x_3	x_3	x_3
+	−	−	−	+	+	+	−
+	+	−	−	−	−	+	+
+	−	+	−	−	+	−	+
+	+	+	−	+	−	−	−
+	−	−	+	+	−	−	+
+	+	−	+	−	+	−	−
+	−	+	+	−	−	+	−
+	+	+	+	+	+	+	+

Segav effekt	x_0	x_1 $x_2 x_3$	x_2 $x_1 x_3 x_4$	x_3 $x_1 x_2 x_4$	x_4 $x_1 x_2 x_3$	$x_1 x_2$ $x_3 x_4$	$x_1 x_3$ $x_2 x_4$	$x_1 x_4$ $x_2 x_3$	y	y^2
Põhinivoo		0.2	1.0	50	10					
Varieerimisühik (l_i)		0.2	0.1	5	10					
Alumine nivoo (-)		0	0.9	45	0					
Ülemine nivoo (+)		0.4	1.1	55	20					
Katsed: 1	+	-	-	-	-	+	+	+	37	1369
2	+	+	-	-	+	-	-	+	44	1936
3	+	-	+	-	+	-	+	-	52	2704
4	+	+	+	-	-	+	-	-	60	3600
5	+	-	-	+	+	+	-	-	36	1296
6	+	+	-	+	-	-	+	-	51	2601
7	+	-	+	+	-	-	-	+	50	2500
8	+	+	+	+	+	+	+	+	62	3844
$\sum x_{ij} y_j$	392	42	56	6	-4	-2	12	-6		
$D_i = \frac{1}{N l_i} \sum x_{ij} y_j$		26.3	70.0	0.15	0.05					
$D_i \, l_i^2$		1.05	0.7	3.75	-5.0					

Lineaarne mudel

$$y = b_0 + b_1\left(x_1 - x_1^0\right) + b_2\left(x_2 - x_2^0\right) + \ldots +$$
$$+ b_n\left(x_n - x_n^0\right)$$

$$b_0 = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} y_i$$

$$b_i = \frac{1}{N\,l_i}\sum_{j=1}^{N} x_{ij}\, y_j$$

$$b_0 = \frac{392}{8} = 49$$

$$y = 49 + 26.3\left(x_1 - 0.2\right) + 70.0\left(x_2 - 1\right) +$$
$$0.15\left(x_3 - 50\right) - 0.05\left(x_4 - 10\right)$$

Dispersioonanalüüs näitab, et x_3**,** x_4 mõju on väike, st

$$y = 49 + 26.3\left(x_1 - 0.2\right) + 70.0\left(x_2 - 1\right)$$
$$= 25.3\,x_1 + 70.0\,x_2 - 26.26$$

8. Murdfaktoriaalne katseplaan

S.o. katseplaan, mis on saadud täisfaktoriaalsest sel teel, et mõned interaktsioonid on võetud uuteks faktoriteks.

Murd–faktoriaalse katseplaani maatriks koosneb m faktoriga täisfaktoriaalse katseplaani maatriksist ning selle laiendatud maatriksi nendest veergudest, millele vastavad interaktsioonid on määravate seoste abil võrrutatud uute faktoritega.

$$\underbrace{x_i \; x_k = x_{m+1}}_{\text{nn. määrav seos}} \qquad \underbrace{1, 2}_{i,\,k}, \ldots, m$$

NB! Segavad efektid (s.o. summaarne efekt)

<u>Näiteks:</u>

4 katse puhul saab määrata:

1) kahe faktori peaefektid ja nende interaktsiooni, määravad seoseid pole (täisfaktoriaalne katseplaan)

2) kolme faktori peaefektid eeldusel, et neist iga kahe interaktsioon on null; üks määrav seos, iga faktori peaefekt on segatud ülejäänud kahe faktori interaktsiooniga;

Kui määrav seos $x_1 x_2 = x_3$, siis

Efekt	x_1	x_2	x_3
segav efekt	$x_2 x_3$	$x_1 x_3$	$x_1 x_2$

12.3 Abstraktne realisatsioonitehnika

(Abstract Realization Theory)

m	sisendit	$u \in K^m$
p	väljundit	$y \in K^p$
n	mõõtmeline	$x \in K^n$

Def. m sisendiga, p väljundiga, n mõõtmeline lineaarne dünaamiline süsteem on maatriksite

$\sum = (F, G, H)$ kolmik (triplett)

kus F on $n \times x$ ülekande maatriks,

G on $n \times m$ sisendi maatriks,

H on $p \times n$ väljundi maatriks.

$$\begin{cases} x(t) = F\,x(t) + G\,u(t) \\ y(t) = H\,x(t) \end{cases}$$

<u>NB! Siin on aeg oluline</u>!

Formaalsed lahendid:

Vt Concise Encyclopedia of
Modelling & Simulation
Pergamon, Oxford et al., 1992