3. PÕHITEOREEMID, STABIILSUS

3.1 Põhiteoreemid

1. Lahendi eksisteerimise ja ühesuse teoreem

- lineaarne — Perko, 1991, lk. 17
- mittelineaarne — Perko, 1991, lk. 73

2. Teoreem algtingimustest

Perko, 1991, lk. 79

3. Teoreem parameetritest

Perko, 1991, lk. 83

L. Perko Differential Equations and Dynamical Systems.
Springer, New York et al., 1991

4. Lineariseerimisteoreem

Kui mittelineaarsel süsteemil

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

on lihtne püsipunkt $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$, siis tema faasipilt püsipunkti naabruses on kvalitatiivselt sarnane lineariseeritud süsteemi faasipildiga, v.a. juhul, kui lineariseeritud süsteemi püsipunkt on tsenter

vt. Arrowsmith, Place, 1982

D.K. Arrowsmith, C.M. Place
Ordinary Differential Equations, Chapman and Hall, London, 1982

5. Poincaré – Bendixsoni teoreemid

A. Olgu süsteemi $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ trajektoor $\Phi_t(x_0)$ määratud ainult piiratud faasiruumi osas *D* meelevaldsel ajal $t \geq 0$. Siis $t \to \infty$ puhul trajektoori $\Phi_t(x_0)$ punktid:

kas lähenevad püsipunktile,
või piirtsüklile.

Arrowsmith, Place 1982
Hirsch, Smale, 1974

Järeldus: Kui faasiruumi osa *D* on suletud, positiivselt invariantne (st, $t > 0$) ja selles pole püsipunkte, siis peab *D* sisaldama piirtsüklit

B. Olgu *D* faasitasandi lihtne (st. ilma „aukudeta“) piirkond, milles vektorväli

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \{X_1(x_1, x_2),\ X_2(x_1, x_2)\}$$

rahuldab tingimust, et

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2}$$

on konstantse märgiga. Siis süsteemil

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$$

puuduvad suletud trajektoorid, mis täielikult asetseksid piirkonnas *D*.

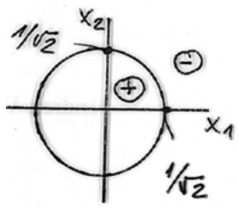
Näide Poincaré – Bendixsoni teoreemi juurde

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 + x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) + K, \quad K = \text{const.}$$

Näidata, et suletud trajektoor (piirtsükkel)
kas ümbritseb koordinaatide algust, või lõikub ringjoonega

$$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$$

$$X_1(x_1, x_2) = -x_2 + x_1\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right)$$
$$X_2(x_1, x_2) = \quad x_1 + x_2\left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) + K$$
$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} = \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) - 2x_1^2 = 1 - 3x_1^2 - x_2^2$$
$$\frac{\partial X_2}{\partial x_2} = \left(1 - x_1^2 - x_2^2\right) - 2x_2^2 = 1 - x_1^2 - 3x_2^2$$
$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 2 - 4\left(x_1^2 + x_2^2\right)$$



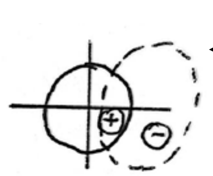
$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 0 \rightarrow x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$$

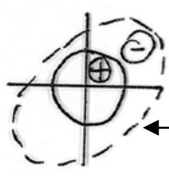
Teoreemi kohaselt ei saa piirtsükkel asetseda ringjoone

$x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$ sees.

Võimalused:

1) piirtsükkel lõikab joont $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$





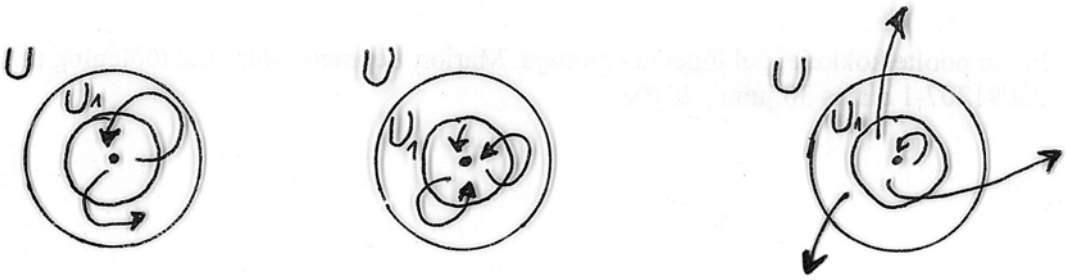
2) piirtsükkel asetseb tervikuna piirkonnas $x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{2}$,

kuid ümbritseb punkti (0,0).

3.2 Stabiilsus

piirkond U hõlmab püsipunkti

U_1 väiksem piirkond



stabiilne | asümptootiliselt stabiilne | ebastabiilne

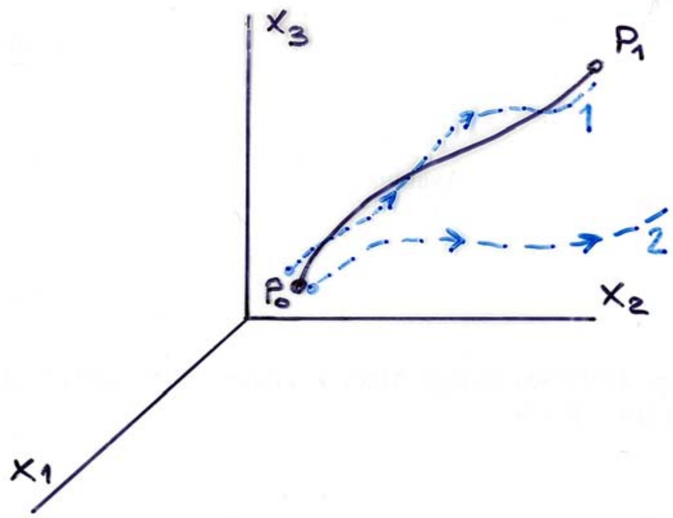
püsipunkt P^E on

1) stabiilne, kui P^E iga lähispiirkonna U jaoks eksisteerib faasiruumis väiksem lähispiirkond U_1, mis sisaldub piirkonnas U, nii et iga lahend, mis algab piirkonnas U_1 jääb piirkonda U

2) asümptootiliselt stabiilne, kui kõik lahendid, mis algavad piirkonnas U_1, lähenevad punktile P^E kui $t \to \infty$.

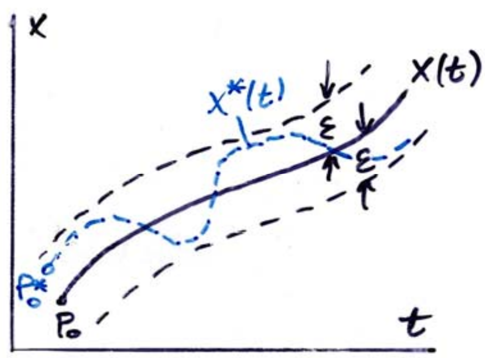
3) ebastabiilne (mittestabiilne), kui lahend, mis algab piirkonnas U, viib süsteemi tasakaaluseisundist välja.

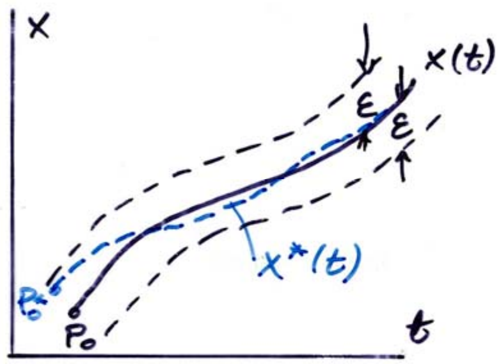
Probleem



Lepik-Engelbrecht lk.87-88

Ljapunovi stabiilsus:



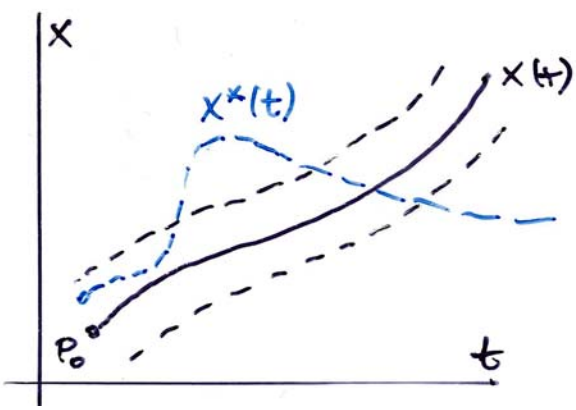


$$\left|x(t) - x^*(t)\right| < \varepsilon$$

Stabiilne

$$\lim_{t\to\infty} \left|x(t) - x^*(t)\right| = 0$$

asümptootiliselt stabiilne



Ljapunovi stabiilsusteoreem

Olgu süsteemil $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}),\quad \mathrm{x} \in \mathrm{s} \in R^2$ püsipunkt koordinaatide alguses. Kui eksisteerib reaalne funktsioon V selle punkti naabruses, nii et

a) eksisteerivad pidevad osatuletised

$$\partial \mathrm{V} / \partial \mathrm{x}_1 \quad \text{ja} \quad \partial \mathrm{V} / \partial \mathrm{x}_2,$$

b) V on positiivselt määratud,

c) $\dot{V}$ on negatiivselt poolmääratud,
siis iseärane punkt on stabiilne.

Kui

c) $\dot{V}$ on negatiivselt määratud, siis püsipunkt on asümptootiliselt stabiilne.

Kuidas määrata V – d ? Retsept puudub.

$$\dot{V}(x(t)) = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 \right) = \dot{V}(x)$$

sest

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2)$$
$$\dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2)$$

Näide: $$\dot{x}_1 = x_1^2$$
$$\dot{x}_2 = 2x_2 - x_1 x_2$$

Proovime kuupfunktsiooni

$$V = \alpha x_1^3 + \beta x_1^2 x_2 + \gamma x_1 x_2^2 + \delta x_2^3$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – konstandid

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = 3\alpha x_1^2 + 2\beta x_1 x_2 + \gamma x_2^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = \beta x_1^2 + 2\gamma x_1 x_2 + 3\delta x_2^2$$

$$\dot{V} = \left(\frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 \right) =$$

$$= 3\alpha x_1^4 + 2\beta x_1^3 x_2 + \gamma x_2^2 x_1^2 + 2\beta x_1^2 x_2^2 + 4\gamma x_1 x_2^3 +$$
$$+ 6\delta x_2^4 + \beta x_{1_1}^3 x_2 + 2\gamma x_1^2 x_2^2 - 3\delta x_1 x_2^3 =$$

$$= 3\alpha x_1^4 + \beta x_1^3 x_2 + (2\beta - \gamma)\, x_1^2 x_2^2 + (4\gamma - 3\delta) x_1\, x_2^3 + 6\delta x_2^4$$

$$\alpha = \frac{1}{3},\ \beta = 4,\ \gamma = 2,\ \delta = 4/3$$

$$\dot{V} = (x_1 + x_2)^4 + 7x_2^4 \quad - \quad \text{positiivne}$$

Integreerimisel kontrollime

$$V = \frac{1}{3} x_1^3 + 4x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 + \frac{4}{3} x_2^3$$

Kui $x_2 = 0,\quad V = \frac{1}{3} x_1^3$ – positiivne $(0,0)$ juures

$(0,0) \rightarrow$ mittestabiilne

Oluline positiivne tulemus

Hamiltoniaan H on Ljapunovi funktsioon V !

Kanoonilisel kujul

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbf{R}^{n}$ muutujad:

q - üldistatud koordinaat
p - üldistatud kiirus (impulss)

NB! momentum - engl.

$$\boxed{\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{q}} \quad , \quad \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}}}$$

$$\boxed{H(\mathbf{p},\mathbf{q}) = T(\mathbf{p},\mathbf{q}) + W(\mathbf{q})}$$

kineetiline energia   potentsiaalne energia

$W(0) = 0$

T – positiivne ruutfunktsioon p – st

$p = q = 0$ – tasakaal

H – positiivne

$\frac{dH}{dt} = \dot{H}$ negatiivselt poolmääratud

$$H \equiv V$$