

1. SISSEJUHATUS

Definitsioon: mõiste määratlemine teiste tuntud mõistete abil

Matemaatiline modelleerimine?

1. Suhted $\left\{ \begin{array}{l} \text{protsessi} \\ \text{nähtust} \\ \text{süsteemi} \end{array} \right\}$ iseloomustavate

muutujate vahel kujutatakse matemaatiliste

mõistete $\left\{ \begin{array}{l} \text{algebralised võrrandid} \\ \text{diferentsiaalvõrrandid} \\ \text{integralvõrrandid} \\ \dots \end{array} \right\}$ abil

2. Mudel on füüsikalist nähtust iseloomustavate oluliste aspektide matemaatiline esitus, mis võimaldab nähtusest saada informatsiooni.

Kui mudel on liialt keeruline, on tema kasutatavus küsitav.

Teine äärmus – lihtsus

Keerulisus vrs lihtsus

Gibbs
Einstein

3. Matemaatiline modelleerimine on protsess, mille abil reaalsust interpreteeritakse ja esitatakse abstraktsete sümbolite abil.

Matemaatiline
modelleerimine

Teadus

loodusseadused
matemaatika

Kunst

loometöö
intuitsioon

4. Analüüs ja süntees

Reaalsus

Eksisteeriv

analüüs

Loodav

süntees

Omadused:
osaliselt teada
osaliselt teadmata

Omadused:
ette antud.

One of the principal objects of theoretical research in any department of knowledge is to find the point of view from which the subject appears in its greatest simplicity.

J.W.Gibbs, 1881

Everything should be made as simple as possible but not simpler.

A.Einstein

Kõigis teadusvaldkondades on teoreetiliste uuringute põhiprobleemiks leida vaatepunkt, millest uuritav nähtus paistaks oma lihtsaimas kujus.

J.W. Gibbs, 1881

Kõik tuleb teha nii lihtsaks kui võimalik, kuid mitte lihtsamaks.

A. Einstein

Küsimused:

Mida tähendab väide, et teatud hulk matemaatilisi sümboleid ja suhteid on reaalse nähtuse esitajad?

Millal on võimalik aktsepteerida matemaatilisest mudelist loogiliselt tuletatavaid järeldusi kui reaalsuse tõelist olemust ja aspekte?

Kui ühte nähtust kirjeldab mitu mudelit, kas võib neid käsitleda ekvivalentsetena?

Kuna algandmed pole üldjuhul kunagi täiuslikud, kas on põhjust nõuda mudeli täielikku adekvaatsust olemasolevatele algandmetele?

Kursuse eesmärk:

- mõtlemise treenimine
- küsimuste esitamise treenimine
- vastused?

Põhiskeem:

1. püstitada probleem
2. konstrueerida probleemi matemaatiline kirjeldus
3. analüüsida ja lahendada matemaatiline probleem
4. analüüsida mudeli vastavust reaalsusele
5. kirjutada aruanne.

Mida me modelleerime?

looduslikud süsteemid – elus
 – eluta

tehissüsteemid – füüsikalised (tehisobjektid)
 – abstraktsed (börs)

humanitaaria – sotsiaalsed protsessid

“Suured” probleemid

Maailma, Universumi algus

Liikide teke

...

“Väikesed” probleemid

Tala tugevusarvutus

Inflatsiooni kiirus

...

Kuidas modelleerida kvalitatiivseid struktuure?

- väärtussüsteem
- maailmavaade
- religioon
- teaduse paradigma

Algteadmisi suurustest (skaala)

aeg	min	10^{-24} s	ebastabiilsete osakeste eluaeg
	max	$5 \cdot 10^{17}$ s	universumi vanus

10^{41}

pikkus	min	10^{-17} m	aatomisisene mõõt
	max	10^{26} m	horisont (kaugemad tähtkujud)

10^{43}

temperatuur

alates “suurest paugust”

10^{-43} s	–	10^{32}	kraadi (oletus)
10^{-2} s	–	$100 \cdot 10^9$	kraadi
10^{-1} s	–	$30 \cdot 10^9$	kraadi
1s	–	$10 \cdot 10^9$	kraadi

Kuidas algas modelleerimine?

Matemaatika vanas Kreekas ca 2500 a eest

aru saada
seletada
ennustada

looduslikke
tehnilisi
sotsiaalseid
...
nähtusi

taevakehad
põllumajandus
inseneriobjektid

selleks vaja

kokku lugeda
mõõta
sorteerida
järjestada
elimineerida

kalender
kaalud, mõõdud
kanalid
maksud

aritmeetika
geomeetria

Leonardo da Vinci
Isaac Newton

Matemaatilised mudelid

Füüsikalised mudelid

Tänapäeval

- põhjus ja tagajärg
sündmuste rida on põhjuslikkuse ahel
kas alati?
- sümmeetria, selle kadu
- determineeritus
-

Globaalprobleemid

inimene – inimene
inimene – loodus

Rooma klubi

D.H.Meadows. The Limits to Growth, 1972
M.Mesarovich, E.Pestel. Mankind at the
Turning Point, 1974.

Paar väga olulist mõtet:

Descartes 1596 -- 1650

Metodoloogiline kahtlemine kõigis tões
cogito, ergo sum

Paul Dirac

Võiks arvata, et vanajumal oli kõrge kvalifikatsiooniga matemaatik ja ta kasutas kõige keerulisemaid matemaatilisi võtteid Universumi konstrueerimisel.

Näited:

Kepleri mudel

Laeva tasakaal

Veresoonkond kui fraktaalne süsteem

Koolibrii

Piitsa mudel

Lume kühmud

Terminoloogia:

<i>model</i>	<i>mudel</i>
<i>theory</i>	<i>teooria</i>
<i>hypothesis</i>	<i>hüpotees</i>
<i>conjecture</i>	<i>oletus</i>
<i>postulate</i>	<i>postulaat</i>
<i>axiom</i>	<i>aksioom</i>
<i>law</i>	<i>seadus</i>
<i>theorem</i>	<i>teoreem</i>
<i>lemma</i>	<i>lemma</i>
<i>corollary</i>	<i>järeldus</i>

Probleeme:

1. Laeva stabiilsus.
2. Voolamine (suletud) kanalis, voolamine veresoontes.
3. Neuronid.
4. Ilmaennustused.
5. Kasvuhoonegaasid (CO₂, ...), s.h. Eestis.
6. Mereökoloogia – kalade arvu ja planktoni tiheduse muutumine.

Kuidas kirjeldada protsessi, nähtust, kvantitatiivseid suhteid, kvalitatiivseid suhteid?

Kas piisab, kui ütleme

homme tuleb külmem ilm
sild peaks olema vastupidav, et
rasked autod saaksid üle sõita
rahvastikuarv kahaneb (kasvab)
CO₂ on liiga palju
majandustsüklid mõjutavad SKP'd
DNA ahelas on palju molekule

Näited

1. J.Einasto ao, A 120 – Mpc periodicity in the three-dimensional distribution of galaxy super clusters. *Nature*, 1997, vol. 385, 9 Jan., 139-141.
2. J.Kalda, Simple model of intermittent passive scalar turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 2000, 84, N 3, 471-474.

Kepleri mudel

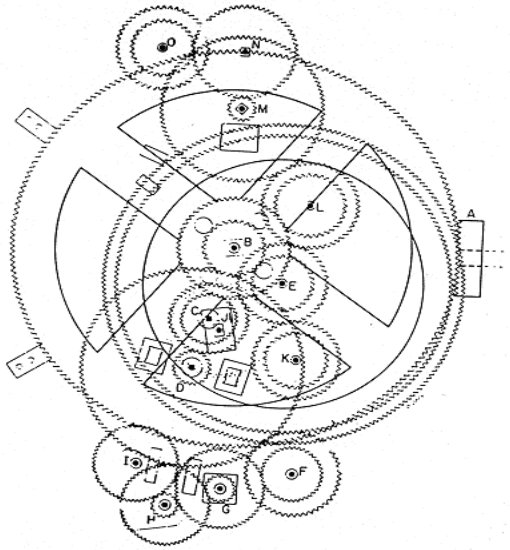


Figure 8 Gearing in the Antikythera mechanism, an ancient Greek planetary calculator

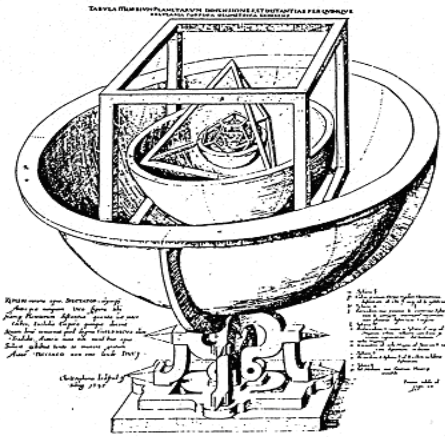


Figure 9 Kepler's model of the spacing of planetary orbits, based on the five regular polyhedra (published in 1596)

Laeva tasakaal

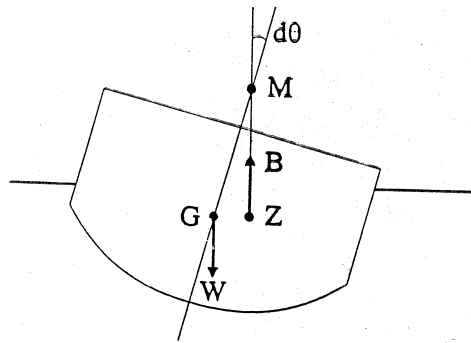


Figure 1. The righting lever, GZ , due to out-of-line action between the weight and buoyancy of a vessel which act through the centre of gravity, G , and the centre of buoyancy, Z , respectively.

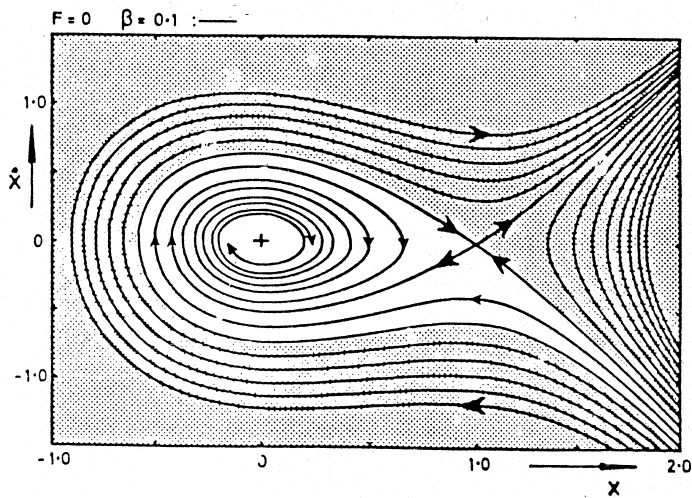
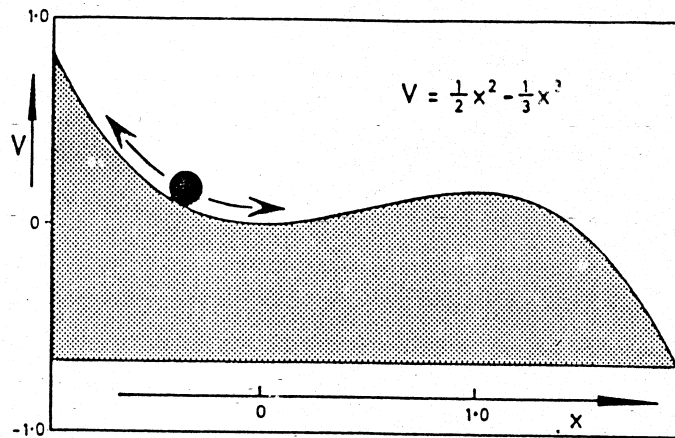


Figure 3. Phase portrait of the dynamics of an archetypal ship roll equation.

Veresoonkond kui fraktaalne süsteem

Fractality of the blood-vessel system: the model and its applications.

Jaan Kalda

*Institute of Cybernetics, Estonian Acad. Sci., Akadeemia tee 21, EE0026 Tallinn,
Estonia. Phone: (372)-2-526-416 Fax: (372)-639-70-39 e-mail: kalda@ioc.ee*

Our purpose here is to construct a fractal model of the blood-vessel system as a whole. It should satisfy the following rather generic criteria:

- a) it should be in accordance with the simplest physical laws, such as the flow continuity and the Poiseuille law in the case of the blood-vessel system;
- b) it should satisfy certain physiological requirements, e.g. ensure a complete (homogeneous) blood supply of the organism;
- c) it should be in accordance with our knowledge about the processes governing the growth and formation of the "trees";
- d) it should be self-similar within a wide range of scales;
- e) the result of many iterations of a generation-to-generation relation specifying the model should not be very sensitive to the subtleties of the model;
- f) the model should not contradict empirical data.

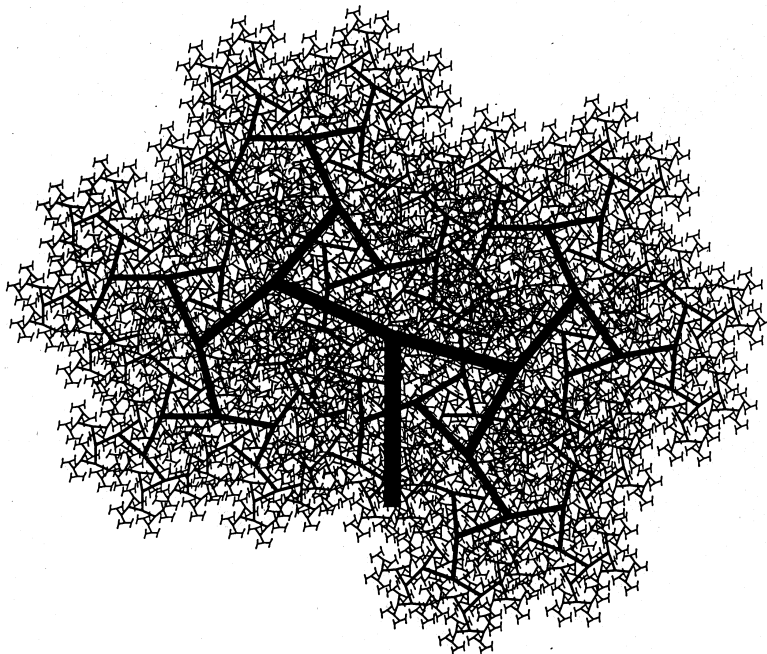


Figure 1: Example of a fractal tree with the similarity dimension exceeding the dimensionality of the embedding space. $D_s \approx 2.53$.

Koolibri

Aerodynamics of the hovering hummingbird

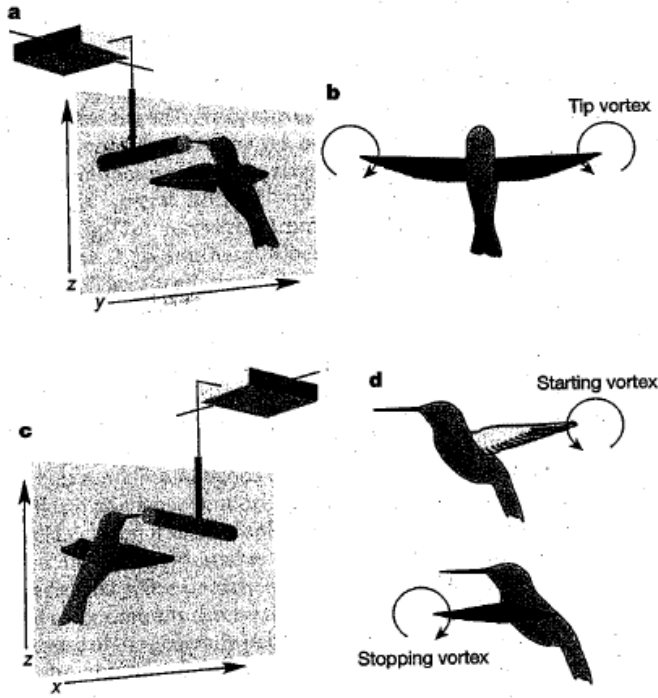


Figure 1 | DPIV methodology. a, Birds hovering at a feeder positioned such that the two-dimensional laser light sheet illuminated wake-entrained oil particles moving in a frontal plane^{5,6}. b, The expected wake structures within the frontal plane^{5,6}. c, Light sheet oriented in the parasagittal plane, centred at midwing. d, The expected wake structures within the parasagittal plane^{5,6}.

Piitsa mudel

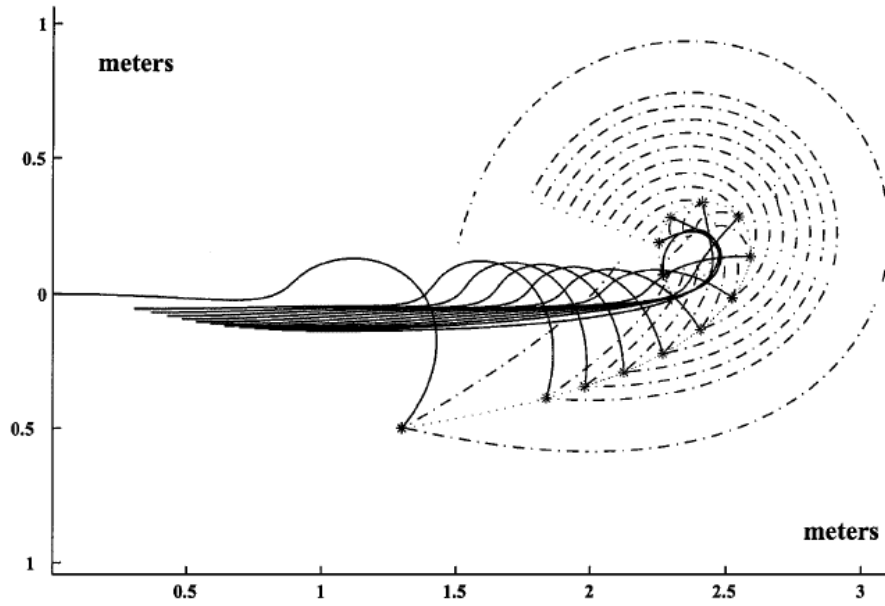


Fig. 20. Numerical solution in Case II at various times. The solid curves are the rod; the dashed curve is the path the tip of the whip travels; the dash-dotted curves are the shock waves.

Lume kühmud



Fig. 1. Hump pattern on ski slope in Lech (Austria) (H. Truöl-SZ Bildarchiv).

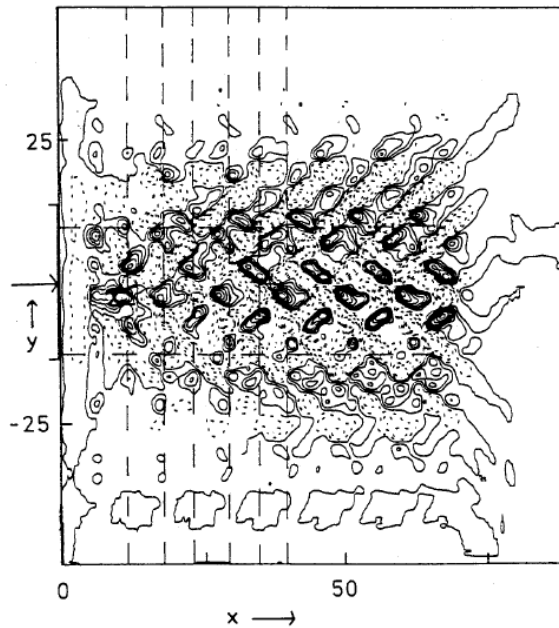


Fig. 8. Nonlinear run R7 with initial hump of 0.4 m height. The cross marks the peak of this nucleus. Deviation of terrain height from the main slope with contour interval 0.025 m; 1500 skiers. Otherwise as in Fig. 3 except for the dashed lines across the slope which give the first five turning lines according to the linear model. The dashed lines down the slope connect the humps as obtained in R1 (see Fig. 2) off the axis of symmetry. Here, this axis is defined by the nucleus.